

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 13



Ярославль 2018

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Ярославский государственный технический университет»

МАТЕМАТИКА И ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 13

Ярославль
Издательский дом ЯГТУ
2018

УДК 51:378
ББК 22.1
М34

М34 Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 13. – Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2018. – 328 с.

ISBN 978-5-9914-0712-0

В сборнике представлены научные статьи по актуальным вопросам математики, физики, информатики и методике их преподавания, а также математического моделирования технических, химических и технологических процессов и систем.

УДК 51:378
ББК 22.1

Редакционная коллегия: Ю.К. Оленикова (председатель), А. В. Бородин, Д.О. Бытев, А.Н. Жаров, В. Ш. Ройтенберг, И.М. Каневский.

Рецензенты: кафедра автоматизированных систем управления Ярославского высшего военного училища противовоздушной обороны; Д.Ф. Белоножко, д-р физ.-мат. наук, профессор Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

ISBN 978-5-9914-0712-0

© Ярославский государственный
технический университет, 2018

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

УДК 517.925

В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru

ПРИЗНАКИ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Исследована нормальная периодическая система обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматривается критический по линейной части случай устойчивости. Получены условия устойчивости нулевого решения по параметру. Используются нелинейные свойства оператора монодромии.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, устойчивость, малый параметр, оператор монодромии.

V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: v.abramov@rsu.edu.ru

SIGNS OF STABILITY OF THE ZERO SOLUTION OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL PARAMETER

We investigate a normal periodic system of ordinary differential equations in a neighborhood of infinity. The stability case, which is critical in the linear part, is considered. The stability conditions of the zero solution via the parameter are obtained. The properties of the monodromy operator are used.

Keywords: differential equation, stability, small parameter, operator of monodromy.

Свойство устойчивости по параметру тривиального решения системы дифференциальных уравнений [1] имеет важное практическое значение. В частности, это свойство может сохраняться при бифуркации смены типа устойчивости по Ляпунову. Кроме того, из устойчивости невозмущенного решения по параметру следует аналогичное свойство для малых ограниченных решений при их бифуркации. Основные результаты исследований свойства устойчивости по параметру получены с помощью комбинации прямого метода Ляпунова и метода усреднения в предположении, что тривиальное решение системы при нулевом значении параметра устойчиво по Ляпунову, но не асимптотически [1].

В данной работе для решения задачи об устойчивости по параметру будем использовать локальную оценку спектрального радиуса оператора монодромии. При этом используем метод исследования устойчивости по Ляпунову периодического решения из монографии [2].

Рассмотрим ω -периодическую непрерывную по t систему вида

$$\dot{x} = A(t)x + g(t, x, \mu), \quad (1)$$

в которой $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ – малый параметр, $g(t, x, \mu)$ – достаточно гладкая вектор-функция от (x, μ) в окрестности точки $(0_n, 0_m)$, $g(t, 0_n, \mu) \equiv 0_n$, $g'_x(t, 0_n, 0_m) \equiv 0_{nn}$ ($0_n \in \mathbb{R}^n$ – нулевой вектор, 0_{nn} – нулевая $n \times n$ -матрица). Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$; $X = X(\omega)$ – матрица монодромии. Будем предполагать, что $\rho(X) = 1$ – спектральный радиус матрицы X .

Определим свойство устойчивости нулевого решения в терминах норм степеней $x(s\omega, a, \mu)$ оператора монодромии $x(s, a, \mu)$ (здесь, по сути, используется тот же подход, что и для малого периодического решения в работе [3]).

Определение. Решение $x \equiv 0_n$ системы вида (1) называется μ -устойчивым (устойчивым по параметру), если для любого решения $x(t, a, \mu)$, $x(0, a, \mu) = a$, системы (1) и для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta > 0$ и множество $M : 0_m \in M \subseteq \mathbb{R}^m$, имеющее 0_m предельной точкой, для которых из неравенств $\|a\| < \delta$, $\mu \in M : \|\mu\| < \delta$ следует, что значение $x(r\omega, a, \mu)$ определено при всех $r \in \mathbb{N}$ и справедлива оценка $\|x(r\omega, a, \mu)\| < \varepsilon$.

Задача. Найти условия устойчивости нулевого решения по параметру по свойствам первого приближения оператора монодромии.

При решении задачи будем использовать локальную схему представления оператора монодромии предложенную в работе [4].

Допустим, имеет место равенство

$$\int_0^\omega X^{-1}(\tau)g(\tau, X(\tau)a, \mu)d\tau = f(a, \mu) + \bar{\varphi}(a, \mu) + \bar{\psi}(a, \mu), \quad (2)$$

в котором $f(a, \mu)$ – вектор-форма от a и μ , $f(\alpha a, \beta \mu) = \alpha^k \beta^s f(a, \mu)$, $k \in N$ нечётно, $s \geq 0$, $k + s > 1$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(k+s)} \|\bar{\varphi}(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0$, $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-s} \|\bar{\psi}(a, \beta \mu)\| \equiv 0$ ($\|\ast\|$ – произвольно выбранная векторная норма или согласованная с ней матричная норма). При этом

$$\int_0^{\omega} X^{-1}(\tau)g(\tau, x(\tau, a, \mu), \mu)d\tau - f(a, \mu) = \varphi(a, \mu) + \psi(a, \mu), \quad (3)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(k+s)} \|\varphi(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0, \quad \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-s} \|\psi(a, \beta \mu)\| \equiv 0.$$

Теорема 1. Пусть возможно разложение $f(a, \mu) = F(a, \mu)a$, для которого существует такое $\mu = \mu_0, \|\mu_0\| = 1$, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}^n, \|\lambda\| = 1$ выполняются условия: 1) $XF(\lambda, \mu_0) - F(\lambda, \mu_0)X \equiv 0_{nn}$, 2) $\|E + \alpha F(\lambda, \mu_0)\| \leq 1 - b\alpha$, где $b > 0$ – некоторое число, $\alpha > 0$ – произвольное достаточно малое число. Тогда решение $x \equiv 0_n$ системы (1) – (2) μ -устойчиво.

Доказательство. В силу свойств системы (1) можно подобрать такое число $\delta_0 > 0$, что любое ее решение $x(t, a, \mu)$ определено при $t \in [0, \omega]$, если $\|a\| < \delta_0, \|\mu\| < \delta_0$.

Пусть $a = \alpha\lambda$ и $\mu = \beta\mu_0$, где $0 < \alpha < \alpha_1 \leq \delta_0, \lambda \in \mathbb{R}^n, \|\lambda\| = 1, 0 < \beta < \beta_1 \leq \delta_0$. Выберем специальное разложение $f(a, \mu) = F(a, \mu)a$, кроме того, произвольно выберем разложения $\varphi(a, \mu) = \Phi(a, \mu)a, \psi(a, \mu) = \Psi(a, \mu)a$.

Оценим спектральный радиус матрицы $X[E + F(a, \mu)]$ по формуле Гельфанда: $\rho(D) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt[r]{\eta(D^r)}$, где $\eta(*)$ – произвольно заданная норма матрицы [5]. При условии 1) и при сделанных заменах переменных матрицы X и $F(a, \mu)$ коммутируют. Поэтому справедливо условие

$$\forall l = \overline{0, r}: (XF(a, \mu))^l - X^l F^l(a, \mu) \equiv 0_{nn}.$$

Обозначим $B = E + F(a, \mu), F = F(a, \mu)$. По формуле бинома получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \sqrt[r]{\|(XB)^r\|} &= \sqrt[r]{\|X^r B^r + (XB)^r - X^r B^r\|} \leq \\ &\leq \sqrt[r]{\|X^r B^r\| \left(1 + \|(XB)^r - X^r B^r\| \cdot \|X^r B^r\|^{-1} \right)} \leq \\ &\leq \sqrt[r]{\|X^r\|} \|B\| \sqrt[r]{1 + \left\| \sum_{l=0}^r C_r^l X^{r-l} (XF)^l - X^r \sum_{l=0}^r C_r^l F^l \right\| \|X^r B^r\|^{-1}} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt[r]{\|X^r\|} \|B\| \sqrt[r]{1 + \left\| \sum_{l=0}^r C_r^l X^{r-l} [(XF)^l - X^l F^l] \right\| \|X^r B^r\|^{-1}} = \sqrt[r]{\|X^r\|} \|B\|.$$

Так как $\rho(X) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt[r]{\|X^r\|} = 1$ для системы (1), то в пределе при $r \rightarrow +\infty$ полученная оценка примет вид $\rho(X[E + F(a, \mu)]) \leq \|E + F(a, \mu)\|$. Тогда из условия 2) следует справедливость неравенства

$$\rho(X[E + F(a, \mu)]) \leq 1 - \alpha^{k-1} \beta^s b. \quad (4)$$

Так как $\rho(D) = \inf_{\{\|\cdot\|\}} \{\|D\|\}$ – спектральный радиус матрицы B , где $\{\|\cdot\|\}$ – множество способов матричной нормировки [5], то в силу неравенства (4) существует матричная норма $\|\cdot\|_0$ (также обозначим и согласованную с ней векторную норму), для которой

$$\|X[E + F(a, \mu)]\|_0 \leq 1 - \alpha^{k-1} \beta^s \frac{b}{2} \quad (5)$$

при всех $0 < \alpha < \alpha_1$, $0 < \beta < \beta_1$. В силу свойства аналитической эквивалентности норм существует число $c > 0$, для которого $\|x\|_0 \leq c\|x\|$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-(k+s)} \|\varphi(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0$, то найдется число $\alpha_2 \in (0, \min\{\alpha_1, \beta_1\}]$, для которого при любых $\alpha \in (0, \alpha_2)$ и $\beta \in (0, \alpha_2)$ справедливо неравенство

$$\|X\Phi(\alpha\lambda, \beta\mu_0)\|_0 \leq \frac{b}{4} \alpha^{k-1} \beta^s, \quad \lambda: \|\lambda\| = 1, \quad \mu_0: \|\mu_0\| = 1. \quad (6)$$

Поскольку $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{-s} \|\psi(a, \beta\mu)\| \equiv 0$, то число $\beta_2 \in (0, \alpha_2)$ можно подобрать так, чтобы при всех $\alpha \in [\alpha_2/2, \alpha_2)$ и $\beta \in (0, \beta_2)$ при $\lambda: \|\lambda\| = 1$, $\mu_0: \|\mu_0\| = 1$ было справедливо неравенство

$$\|X\Psi(\alpha\lambda, \beta\mu_0)\|_0 \leq \frac{b}{4} \alpha^{k-1} \beta^s. \quad (7)$$

Из равенств (2) и (3) следует, что

$$x(\omega, a, \mu) = X[E + F(a, \mu) + \Phi(a, \mu) + \Psi(a, \mu)]a. \quad (8)$$

Ясно, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_2/2)$ и $\beta \in (0, \beta_2)$ справедлива оценка $\|x(\omega, a, \mu)\|_0 < 2\|a\|_0$. В силу неравенств (5)–(7) и равенства (8)

при $\beta \in (0, \beta_2)$, $a \in \mathbb{R}^n$ имеем оценки: $\|x(\omega, a, \mu)\|_0 \leq \|a\|_0 < c\alpha_2$, если $\alpha \in [\alpha_2/2, \alpha_2)$, и $\|x(\omega, a, \mu)\|_0 \leq 2\|a\|_0 = 2\|\alpha\lambda\|_0 < 2 \cdot \frac{\alpha_2}{2} \cdot \|\lambda\|_0 \leq \alpha_2 c \|\lambda\| = \alpha_2 c$, если $\alpha \in (0, \alpha_2/2)$.

Итак, $\|x(\omega, a, \mu)\|_0 < c\alpha_2$ для всех $\alpha \in (0, \alpha_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n : \|\lambda\| = 1$ и $\beta \in (0, \beta_2)$. Так как $0 < \alpha_2 \leq \delta_0$ и $0 < \beta_2 < \delta_0$, то, как было сказано в начале доказательства, любое решение $x(t, x(\omega, \alpha\lambda, \beta\mu_0), \beta\mu_0)$ системы (1) определено для $t \in [0, \omega]$, если $\alpha \in (0, \alpha_3)$, $\alpha_3 = \min\{\alpha_2, c\alpha_2\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^n : \|\lambda\| = 1$ и $\beta \in (0, \beta_2)$. Отсюда по индукции следует, что при этом значение $x(r\omega, \alpha\lambda, \beta\mu_0)$ определено при всех $r \in \mathbb{N}$.

Если произвольным образом зафиксировать $\varepsilon > 0$, выбрать число $\delta = \min\{\varepsilon, \alpha_3, \beta_2\}$ и множество $M = \{\mu \in \mathbb{R}^m : \mu = \beta\mu_0, \beta \in \mathbb{R}_+\}$, то при всех $r \in \mathbb{N}$ и при всех $a \in \mathbb{R}^n : \|a\| < \delta$, $\mu \in M : \|\mu\| < \delta$ получим оценку $\|x(r\omega, a, \mu)\| < \varepsilon$. Итак, решение $x \equiv 0_n$ системы (1)–(2) μ -устойчиво по определению. Теорема 1 доказана.

Установим признак устойчивости без предположения о коммутировании типа условия 1) из теоремы 1.

Допустим, справедливо равенство

$$x(\omega, a, \mu) = [X + F(a, \mu) + G(a, \mu)]a, \quad (9)$$

в котором матрица $F(a, \mu)$ однородна: $F(\alpha a, \alpha\mu) \equiv \alpha^k F(a, \mu)$, матрица $G(a, \mu)$ удовлетворяет условию $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|G(\alpha a, \alpha\mu)\| \equiv 0$.

Предположим, что матрица X имеет простую структуру. Причем существует невырожденная матрица U (может быть комплекснозначная), для которой имеет место разложение

$$X = U^{-1}\Lambda U, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_{11}, \dots, \lambda_{nn}), \quad |\lambda_{ii}| = 1, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Теорема 2. Допустим, при условии (10) существует значение $\mu = \mu_0$, для которого при всех $a \in \mathbb{R}^n$ допустимо такое представление $F(a, \mu_0) = U^{-1}B(a)U$, что выполняются условия: 1) $B(a) = (b_{ij}(a))$ – верхнетреугольная матрица ($b_{ij}(a) \equiv 0$, $i < j$); 2) $|\lambda_{ii} + \alpha b_{ij}(a)| \leq 1 - \alpha \bar{b}_i$, $\bar{b}_i > 0$ – некоторые числа, $\alpha > 0$ – малый параметр, $\|a\| = 1$, $i = \overline{1, n}$. Тогда решение $x = 0_n$ системы (1), (9) μ -устойчиво.

Доказательство. Определим способ нормировки $n \times n$ -матриц: $\|*\|_\tau = \|D_\tau U * U^{-1} D_\tau^{-1}\|_\infty$, где U – матрица из условия (10), $D_\tau = \text{diag}\{\tau, \tau^2, \dots, \tau^n\}$, $\tau > 0$ – параметр.

Обозначим $\bar{c} = \max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{\|a\|=1} \left\{ \sum_{j>i} |b_{ij}(a)| \right\}$, $\bar{b} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\bar{b}_i\}$. В силу условий

1) и 2) при $\|a\|=1$, $\tau \geq 1$ установим оценку:

$$\begin{aligned} \|D_\tau U(X + \alpha F(a, \mu_0))U^{-1} D_\tau^{-1}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \tau^i \sum_{j=1}^n |\lambda_{ij} + \alpha b_{ij}(a)| \tau^{-j} \right\} = \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |\lambda_{ii} + \alpha b_{ii}(a)| + \sum_{j=i+1}^n (|\lambda_{ij}| + \alpha |b_{ij}(a)|) \tau^{i-j} \right\} \leq (1 - \alpha \bar{b}) + \alpha \frac{\bar{c}}{\tau}. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть $\tau \geq \tau_1 = \max\{1, 2\bar{c}/\bar{b}\}$. Тогда оценка (11) примет вид

$$\|D_\tau U(X + \alpha F(a, \mu_0))U^{-1} D_\tau^{-1}\|_\infty \leq 1 - \alpha \bar{b} / 2. \quad (12)$$

Определим параметр τ для матричной нормировки $\|*\|_\tau$:

$$\tau = \tau_0 = \max\{1, 2\bar{c}/\bar{b}\}. \quad (13)$$

Далее будем использовать матричную норму

$$\|*\|_0 = \max\{\|*\|, \|*\|_{\tau_0}\}. \quad (14)$$

Согласованную с ней векторную норму обозначим тем же символом и определим равенством: $\|y\|_0 = \|Y\|_0$, где Y – матрица, все столбцы которой равны y .

Произвольно выберем $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-k} \|G(\alpha a, \alpha \mu)\| \equiv 0$ для оператора монодромии (9), то по определению предела можно предполагать, что при $\alpha < \varepsilon$ и $\|a\|_0 = 1$ справедлива оценка

$$\|G(\sqrt[k]{\alpha} a, \sqrt[k]{\alpha} \mu_0)\|_0 < \alpha \bar{b} / 16, \quad (15)$$

кроме того, без ограничения общности рассуждений будем предполагать выполненным условие

$$\|X + F(\sqrt[k]{\alpha} a, \sqrt[k]{\alpha} \mu_0) + G(\sqrt[k]{\alpha} a, \sqrt[k]{\alpha} \mu_0)\|_0 < 2. \quad (16)$$

Выберем $\delta = \varepsilon$, $M = \{\mu : \mu = \gamma \mu_0, \gamma \geq 0\}$. Тогда в силу представления (9) и неравенства (16) при всех $a : \|a\|_0 < \delta / 2$ и $\mu \in M : \|\mu\| < \delta$ справедлива оценка

$$\|x(\omega, a, \mu)\|_0 < 2 \cdot \delta / 2 \leq \varepsilon. \quad (17)$$

Если же $a: \delta / 2 \leq \|a\|_0 < \delta$ и $\mu \in M: \|\mu\| < \delta$, то в силу оценок (11), (12) и (15) при условии (13) справедливо неравенство

$$\|x(\omega, a, \mu)\|_0 \leq (1 - (\varepsilon / 2)(\bar{b} / 2) + \varepsilon \bar{b} / 16) \cdot \varepsilon < \varepsilon. \quad (18)$$

В силу оценок (17) и (18) имеем: $\|x(\omega, a, \mu)\|_0 < \varepsilon$ при $a: \|a\|_0 < \delta$ и $\mu \in M: \|\mu\| < \delta$. Далее, рассматривая $a_1 = x(\omega, a, \mu)$ в качестве начального значения, получим: $\|x(2\omega, a, \mu)\|_0 < \varepsilon$, а затем по индукции: $\|x(r\omega, a, \mu)\|_0 < \varepsilon$ при всех $r \in \mathbb{N}$. Итак, решение $x = 0_n$ системы (1), (9) μ -устойчиво по определению. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ханаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. М.: Наука, 1986.
2. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
3. *Абрамов В.В.* Малое периодическое решение системы с параметром // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 3–12.
4. *Абрамов В.В.* Устойчивость малого периодического решения // Вестник РАЕН. 2013. Т. 13, № 4. С. 3–5.
5. *Хорн Р.А.* Матричный анализ / Р.А. Хорн, Ч.Р. Джонсон. М.: Мир, 1989. 655 с.

УДК 517.5

А. В. Бородин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: alvasborodin@mail.ru

БАРИАНАЛИЗ И N-МЕРНЫЕ КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. 1

Установлены условия бариконформности бариголоморфного отображения. В частности, даны условия конформности многомерного дробно-линейного преобразования.

Ключевые слова: *бариаалгебра, спектральная бариаалгебра, бариголоморфность, бариконформность, дробно-линейные преобразования.*

A. V. Borodin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: *alvasborodin@mail.ru*

**BARYANALYSIS AND N-DIMENSIONAL
CONFORMAL MAPPINGS. 1**

The paper establishes conditions for the bary-conformality of a bary-holomorphic mapping. In particular, we give conditions for the conformality of a multi-dimensional fractional-linear transformation.

Keywords: *bary-algebra, spectral bary-algebra, bary-holomorphic, bary-conformal, fractional-linear transformation.*

Данная работа является продолжением работ [1-3].

Весьма кратко напомним определения и обозначения из [1] (их корректность – см. там же, а для простоты можно считать $\mathbf{P} = \mathbf{A} = \mathbf{C}$ – поле комплексных чисел). Пусть множество $\mathbf{A}(\mathbf{B})$ – коммутативная ассоциативная алгебра с делением (с единицей $e \in \mathbf{A}$) над полем \mathbf{P} , а $\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{A} \langle 0 \rangle$ – её расширение посредством нестандартного нуля $\langle 0 \rangle$ и соответственно нестандартной бесконечности $\langle \infty \rangle = 1/\langle 0 \rangle$ (при этом предполагается, что $\langle 0 \rangle \langle \infty \rangle = e$; подробнее в [1]). Рассмотрим множество $\langle \mathbf{A} \rangle^{n+1}$, элементами которого являются конечные (длиной $(n+1)$) последовательности $\langle x \rangle$ вида

$$\langle x \rangle = \langle x_0; \tilde{x} \rangle = \langle x_0; x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, \tag{1}$$

где $x_0 \in \langle \mathbf{A} \rangle$ – «выделенный» элемент, $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\langle \mathbf{A} \rangle)^n$, $x_k \in \langle \mathbf{A} \rangle$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) – бариординаты (БК) бариэлемента (БЭЛ) $\langle x \rangle$. Для БЭЛ (1) определяются баримоменты k -го порядка:

$$x^k = \mu^k (\langle x \rangle) = x_0 x_1 \cdots x_k \in \mathbf{A} \quad (k \in \mathbf{n} := \{0, 1, \dots, n\}),$$

посредством которых элемент (1) записывается в канонической форме:

$$\langle x \rangle = \langle x^0; x^1/x^0, x^2/x^1, \dots, x^n/x^{n-1} \rangle. \tag{2}$$

Понятно, что элементу $\bar{x} := (x^0, x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{A}^{n+1}$ соответствует БЭЛ $\langle x \rangle = \langle x^0; x^1/x^0, x^2/x^1, \dots, x^n/x^{n-1} \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle^{n+1}$ и наоборот ($\langle \mathbf{A} \rangle^{n+1} \leftrightarrow \mathbf{A}^{n+1}$).

Бариэлементы $\langle x \rangle = \langle x_0; \tilde{x} \rangle$ и $\langle y \rangle = \langle y_0; \tilde{y} \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle^{n+1}$ называются бариравными, если равны соответствующие им элементы \bar{x} и \bar{y} , т.е.

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}. \quad (3)$$

В соответствии с (3) алгебраические операции над элементами множества $\langle \mathbf{A} \rangle^{n+1}$ определяются так: $(\forall \lambda \in \mathbf{P}, \langle x \rangle, \langle y \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle^{n+1})$

$$\lambda \langle x \rangle = \langle \lambda x_0; \tilde{x} \rangle, \quad \mu^k(\langle x \rangle + \langle y \rangle) = \mu^k(\langle x \rangle) + \mu^k(\langle y \rangle) \quad (k \in \mathbf{n}); \quad (4)$$

$$\mu^k(\langle x \rangle \cdot \langle y \rangle) = \sum_{j=0}^k x^{k-j} y^j + s \sum_{j=k+1}^n x^{k-j+n+1} y^j, \quad (5)$$

где параметр $s = \pm 1$ определяет при $s = +1$ гиперболическое, а при $s = -1$ – эллиптическое барипроизведение « \cdot » двух элементов. Операции (4), (5) удовлетворяют аксиомам коммутативной ассоциативной алгебры. При этом нулевым является элемент вида $\langle \tilde{0} \rangle = \langle 0; \tilde{x} \rangle$, противоположным к $\langle x \rangle = \langle x_0; \tilde{x} \rangle$ – элемент вида $-\langle x \rangle = \langle -x_0; \tilde{x} \rangle$, единицей – элемент вида $\langle e \rangle = \langle e; \tilde{0} \rangle$. С этого момента элементы вида (1) (или (2)) называются бари-

элементами n -го порядка (БЭЛ), а множество $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ таких БЭЛ — при $s = +1$ ($s = -1$) эллиптической (гиперболической) бариалгеброй (БА) n -го порядка над полем \mathbf{P} . Поскольку компоненты БЭЛ (1) являются элементами из $\langle \mathbf{A} \rangle$, то наряду с умножением БЭЛ (1) на скаляр $\lambda \in \mathbf{P}$ можно по той же формуле определить его умножение на элемент $a \in \mathbf{A}$: $a \langle x \rangle := \langle ax_0; \tilde{x} \rangle$. Поэтому множество $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ можно трактовать ещё как барилинейное пространство (БЛП) над алгеброй \mathbf{A} . Понятно, что бариалгебра $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ изоморфна алгебре \mathbf{A}^{n+1} ($\langle \mathbf{A} \rangle_s^n \cong \mathbf{A}^{n+1}$).

Если \mathbf{A} – алгебра с инволюцией: $x \rightarrow x^*$ [8] (что дальше и предполагается), то в БА $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ инволюция $\langle x \rangle \rightarrow \langle x \rangle^*$ определяется так:

$$\mu^0(\langle x \rangle^*) = (x^0)^*, \quad \mu^k(\langle x \rangle^*) = s(x^{n-k+1})^* \quad (k \in \mathbf{n}). \quad (6)$$

При этом БЭЛ $\langle x \rangle$ называется бариэрмитовым, если $\langle x \rangle = \langle x \rangle^*$, т.е. если

$$x^0 = (x^0)^*, \quad x^k = s(x^{n-k+1})^* \quad (k \in \mathbf{n}).$$

Вводятся бариунитарные $(\langle x \rangle \langle x \rangle^* = \langle x \rangle^* \langle x \rangle = \langle e \rangle)$ БЭЛ:

$$\langle e \rangle_0 = \langle e; \tilde{0} \rangle, \quad \langle e \rangle_k = \langle \langle 0 \rangle; e, \dots, e, \langle \infty \rangle, 0, \dots, 0 \rangle \quad (k \in \mathbf{n}), \quad (7)$$

где $\langle \infty \rangle$ стоит на k -м месте. В силу (2), (3) $\mu^j(\langle e \rangle_k) = \delta_k^j e$, где δ_k^j – стандартный символ Кронекера. Поэтому ввиду (4), (5)

$$\langle x \rangle = \sum_{k=0}^n x^k \langle e \rangle_k, \quad (8)$$

Следовательно, (7) – это *естественный барибазис* в $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$, баримоменты (2) – *естественные барикоординаты* (БК_e) БЭЛ (1) относительно барибазиса (7); (8) – бариразложение БЭЛ $\langle x \rangle$ по барибазису (7). При этом подалгебру $\langle \mathbf{A} \rangle^0 := \{ a \langle e \rangle_0 = \langle a e; \tilde{0} \rangle : a \in \mathbf{A} \} \subset \langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ можно (посредством очевидного изоморфизма) отождествить с алгеброй \mathbf{A} (т. е. $\langle \mathbf{A} \rangle^0 \cong \mathbf{A}$), а подалгебру $\langle \mathbf{P} \rangle^0 := \{ \lambda \langle e \rangle_0 = \langle \lambda e; 0_+ \rangle : \lambda \in \mathbf{P} \} \subseteq \langle \mathbf{A} \rangle$ – с полем \mathbf{P} .

Кроме того, при $0 \leq k < k' \leq n$ БА $\langle \mathbf{A} \rangle_s^k$ изоморфно вкладывается в БА $\langle \mathbf{A} \rangle_s^{k'}$. Здесь следует отметить, что при $n=0$ БЭЛ $\langle e \rangle_0 = e$ (см. (7)) и, значит,

$$\langle \mathbf{A} \rangle_s^0 = \{ a \langle e \rangle_0 : a \in \mathbf{A} \} = \{ a e : a \in \mathbf{A} \} = \{ a : a \in \mathbf{A} \} = \mathbf{A},$$

т.е. БА нулевого порядка $\langle \mathbf{A} \rangle_s^0$ совпадает с исходной алгеброй \mathbf{A} . БА первого порядка $\langle \mathbf{A} \rangle_s^1$ (как это показано в работах [3, 4]) являются синонимами проективных пространств размерности один. Там же рассмотрена связь БА более высокого порядка ($n \geq 2$) с соответствующими проективными пространствами размерности $n \geq 2$.

Наряду с барибазисом (7), в БА $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ существует *спектральный барибазис* (гиперболический – с индексом «+» и эллиптический – с индексом «-»; см. [1, 2]):

$$\langle \varepsilon \rangle_k^\pm = (n+1)^{-1} \langle \pm e; \varepsilon_k^\pm, \varepsilon_k^\pm, \dots, \varepsilon_k^\pm \rangle \quad (k \in \mathbf{n}), \quad (9)$$

$$\varepsilon_k^+ = \binom{n+\sqrt{-1}}{k} = e \exp\left(\frac{2k\pi}{n+1} i\right) \in \mathbf{A}, \quad \varepsilon_k^- = \binom{n+\sqrt{-1}}{k} = e \exp\left(\frac{(2k+1)\pi}{n+1} i\right) \in \mathbf{A},$$

$$(k \in \mathbf{n}; i = \sqrt{-1}). \quad (9')$$

Элементы $\langle \varepsilon \rangle_k^\pm$ этих базисов обладают спектральными свойствами:

$$\langle \varepsilon \rangle_j^\pm \langle \varepsilon \rangle_k^\pm = \begin{cases} \langle \tilde{0} \rangle, & \text{если } j \neq k, \\ \sum_{k=0}^n \langle \varepsilon \rangle_k^\pm = \langle e \rangle. & \\ \langle \varepsilon \rangle_k^\pm, & \text{если } j = k \end{cases}$$

Для каждого $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ *спектральное бариразложение*

$$\langle x \rangle = \sum_{k=0}^n \lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle) \langle \varepsilon \rangle_k^{\pm}, \quad (10)$$

где (обобщенные) спектральные барикоординаты (БК_c)

$$\lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle) = \lambda_{\pm}^k(\bar{x}) = (n+1) \langle \langle x \rangle, \langle \varepsilon \rangle_k^{\pm} \rangle = \sum_{\beta=0}^n x^{\beta} (\langle \varepsilon_k^{\pm} \rangle^*)^{\beta} \in \mathbf{A} \quad (k \in \mathbf{n}) \quad (11)$$

– это собственные (спектральные) значения БЭЛ $\langle x \rangle$, отвечающие его собственным элементам (9), т. е.

$$\langle x \rangle \langle \varepsilon \rangle_k^{\pm} = \lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle) \langle \varepsilon \rangle_k^{\pm} \quad (k \in \mathbf{n}),$$

а $\langle \langle x \rangle, \langle y \rangle \rangle := \sum_{k=0}^n x^k (y^k)^* \in \mathbf{A}$ – обобщенное барискалярное произведение БЭЛ $\langle x \rangle$ и $\langle y \rangle$. В случае $\mathbf{P} = \mathbf{A} = \mathbf{C}$ собственные значения (11) являются корнями характеристического уравнения

$$P_{n+1}(\lambda; \langle x \rangle) \stackrel{def}{=} (\lambda)^{n+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \text{tr}_k(\langle x \rangle) (\lambda)^{n-k} = 0, \quad (11_0)$$

где $\text{tr}_k(\langle x \rangle) (k \in \mathbf{n})$ – след k -го порядка барилинейного оператора умножения на БЭЛ $\langle x \rangle$ (более общо и более подробно – в [1, 2]). Из (11₀) и (11) вытекает бариоперационный метод решения алгебраических уравнений [5, 6].

Связь между спектральными координатами $\lambda_{\pm}^k = \lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle)$ (из спектрального бариразложения (10)) и барикоординатами $x^k = x^k(\langle x \rangle)$ (из бариразложения (8)) задаётся в одну сторону формулами (11), а в другую сторону формулами

$$x^{\beta} = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^n \lambda_{\pm}^k(\langle \varepsilon_k^{\pm} \rangle)^{\beta} \quad (\beta \in \mathbf{n}). \quad (11')$$

Далее, в силу спектральных свойств элементов спектрального барибазиса (9) ((9')) функционалы (11) являются \mathbf{A} -гомоморфизмами на бариалгебре $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ ($\lambda_k^{\pm}(\langle x \rangle \langle y \rangle) = \lambda_k^{\pm}(\langle x \rangle) \lambda_k^{\pm}(\langle y \rangle)$). Поэтому справедливо мультипликативное равенство

$$\langle x \rangle \langle y \rangle = \sum_{k=0}^n \lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle) \lambda_{\pm}^k(\langle y \rangle) \langle \varepsilon \rangle_k^{\pm}.$$

Кроме того, всякому отображению f , определённом на точечном спектре

$$\sigma_{\pm}(\langle x \rangle) = \left(\lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle) = \sum_{j=0}^n x^j (\langle \varepsilon_k^{\pm} \rangle^j)^*, \quad k \in \mathbf{n} \right) \subseteq \mathbf{A}$$

БЭЛ $\langle x \rangle$ (и принимающему значения в $\langle \mathbf{A} \rangle$), отвечает бариотображение (БО)

$$\langle f \rangle(\langle x \rangle) := \sum_{k=0}^n f(\lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle)) \langle \mathcal{E} \rangle_k^{\pm}, \quad (12)$$

определённое в точке $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ (со значением $\langle y \rangle = \langle f \rangle(\langle x \rangle) \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n$). Другими словами, БО (12) есть продолжение отображения f с алгебры $\langle \mathbf{A} \rangle \supset \mathbf{A}$ на бариалгебру $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$.

Далее рассматривается общее бариотображение (БО)

$$\langle f \rangle : \langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle) \rightarrow \langle y \rangle = \langle f \rangle(\langle x \rangle) \in \langle \mathcal{E} \rangle(\langle f \rangle), \quad (13)$$

где $\langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle) \subseteq \langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ – область определения (бариоткрытое барисвязное множество), а $\langle \mathcal{E} \rangle(\langle f \rangle) \subseteq \langle \mathbf{B} \rangle_r^m$ – область значений бариотображения $\langle f \rangle$, $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ и $\langle \mathbf{B} \rangle_r^m$ – две бариалгебры. В *барикоординатной форме* (относительно барибазиса (7)) отображение (13) переписывается так:

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) \quad (\bar{f} : \tilde{\mathcal{D}}(\bar{f}) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}(\bar{f})), \quad (13_1)$$

или

$$y^j = f^j(\bar{x}) = f^j(x^0, x^1, \dots, x^n) \in \tilde{\mathcal{E}}(\bar{f}^j) \subseteq \mathbf{B} \quad (j \in \mathbf{m} = \{0, 1, \dots, m\}),$$

где

$$\bar{x} = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in \tilde{\mathcal{D}}(\bar{f}) \subseteq \mathbf{A}^{n+1} \quad (\tilde{\mathcal{D}}(\bar{f}) \cong \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle)),$$

$$\bar{y} = (y^0, y^1, \dots, y^m) \in \tilde{\mathcal{E}}(\bar{f}) \subseteq \mathbf{B}^{m+1} \quad (\tilde{\mathcal{E}}(\bar{f}) \cong \langle \mathcal{E} \rangle(\langle f \rangle)),$$

$$\bar{f} = (f^0, f^1, \dots, f^m),$$

$$\bar{f}(\bar{x}) = (f^0, f^1, \dots, f^m)(\bar{x}) = (f^0(\bar{x}), f^1(\bar{x}), \dots, f^m(\bar{x}));$$

в *бариспектральной форме* (относительно спектрального барибазиса (9), (9')) так:

$$y_{\pm}^j = f_{\pm}^j(\bar{x}_{\pm}) = f_{\pm}^j(x_{\pm}^0, x_{\pm}^1, \dots, x_{\pm}^n) \in \mathbf{B} \quad (j \in \mathbf{m}), \quad (13_2)$$

где

$$\bar{x}_{\pm} = (x_{\pm}^0, x_{\pm}^1, \dots, x_{\pm}^n) \in \mathbf{A}^{n+1} \quad (x_{\pm}^k = \lambda_{\pm}^k(\langle x \rangle) \in \mathbf{A}, \quad k \in \mathbf{n}),$$

$$\bar{y}_{\pm} = (y_{\pm}^0, y_{\pm}^1, \dots, y_{\pm}^m) \in \mathbf{B}^{m+1} \quad (y_{\pm}^j = \lambda_{\pm}^j(\langle y \rangle) \in \mathbf{B}, \quad j \in \mathbf{m}),$$

такие, что (см. (10), (11))

$$\langle x \rangle = \sum_{k=0}^n x_{\pm}^k \langle \mathcal{E} \rangle_k^{\pm} \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle), \quad \langle y \rangle = \sum_{k=0}^n y_{\pm}^k \langle \mathcal{E} \rangle_k^{\pm} \in \langle \mathcal{E} \rangle(\langle f \rangle).$$

Баринепрерывность в бариобласти $\langle \mathcal{D} \rangle \subseteq \langle \mathbf{P} \rangle_-^n$ БО $\langle f \rangle$ обозначается через $\langle f \rangle \in \langle C \rangle(\langle \mathcal{D} \rangle)$, а его баринепрерывная s -баридифференцируемость в $\langle \mathcal{D} \rangle$ (о которой речь пойдет чуть ниже) через $\langle f \rangle \in \langle C \rangle_s^{(1)}(\langle \mathcal{D} \rangle)$.

Среди множества произвольных БО (13) выделяются барилинейные бариотображения (БЛО) разного типа бариоднородности, а именно:

1) БО $\langle A \rangle : \langle \mathbf{A} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{B} \rangle_r^m$ называется барилинейным над полем \mathbf{P} , если

$$\left(\forall \langle x \rangle, \langle x' \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n, \right) \left(\forall \lambda \in \langle \mathbf{P} \rangle \right):$$

$$\langle A \rangle(\langle x \rangle + \langle x' \rangle) = \langle A \rangle(\langle x \rangle) + \langle A \rangle(\langle x' \rangle), \quad \langle A \rangle(\lambda \cdot \langle x \rangle) = \lambda \cdot \langle A \rangle(\langle x \rangle).$$

2) БО $\langle A \rangle : \langle \mathbf{A} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ называется барилинейным над алгеброй \mathbf{A} , если

$$\left(\forall \langle x \rangle, \langle x' \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n, \right) \left(\forall a \in \langle \mathbf{A} \rangle \right):$$

$$\langle A \rangle(\langle x \rangle + \langle x' \rangle) = \langle A \rangle(\langle x \rangle) + \langle A \rangle(\langle x' \rangle), \quad \langle A \rangle(a \cdot \langle x \rangle) = a \cdot \langle A \rangle(\langle x \rangle).$$

3) БО $\langle A \rangle : \langle \mathbf{A} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ называется барилинейным над бариалгеброй

$$\langle \mathbf{A} \rangle_s^n, \text{ если } \left(\forall \langle x \rangle, \langle x' \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n \right) \left(\forall \langle a \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n \right):$$

$$\langle A \rangle(\langle x \rangle + \langle x' \rangle) = \langle A \rangle(\langle x \rangle) + \langle A \rangle(\langle x' \rangle), \quad \langle A \rangle(\langle a \rangle \cdot \langle x \rangle) = \langle a \rangle \cdot \langle A \rangle(\langle x \rangle),$$

где « \cdot » – символ либо гиперболического, либо эллиптического умножения БЭЛ.

Из последнего равенства следует, что $\left(\forall \langle x \rangle \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n \right)$

$$\langle A \rangle(\langle x \rangle) = \langle A \rangle(\langle e \rangle \cdot \langle x \rangle) = \langle A \rangle(\langle e \rangle) \langle x \rangle = \langle a \rangle \langle x \rangle \quad (\langle a \rangle = \langle A \rangle(\langle e \rangle)). \quad (14)$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Барилинейный над бариалгеброй $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ бариоператор $\langle A \rangle$ необходимо является оператором бариумножения (гиперболического или эллиптического) на БЭЛ $\langle a \rangle = \langle A \rangle(\langle e \rangle) \in \langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ (обратное утверждение очевидно).*

В зависимости от типа барилинейности БЛО $\langle A \rangle$, для БО (13) определяются понятия баридифференцируемости и барипроизводной (по Фреше [9]). Однако дальше, для простоты изложения, $\mathbf{A} = \mathbf{P}$, и значит, рассматриваются только два типа барилинейности БЛО $\langle A \rangle$.

Определение 1. БО $\langle f \rangle(\langle x \rangle)$ барилидифференцируемо над полем \mathbf{P} во внутренней точке $\langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle)$, если существует барилинейный над полем \mathbf{P} оператор

$$\langle A \rangle: \langle \mathbf{P} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{P} \rangle_s^n \quad (15)$$

такой, что $(\forall \Delta \langle x \rangle \in \langle \mathbf{P} \rangle_s^n: \langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle))$

$$\Delta \langle f \rangle(\langle x \rangle) := \langle f \rangle(\langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle) - \langle f \rangle(\langle x \rangle) = \langle A \rangle(\Delta \langle x \rangle) + o(\|\Delta \langle x \rangle\|),$$

где $\|\cdot\|$ – любая из норм на конечномерном пространстве $\langle \mathbf{P} \rangle_s^n$. БЛО (14) называется барипроизводной БО (13) в точке $\langle x \rangle$ и обозначается символом $D \langle f \rangle(\langle x \rangle)$ (или $\langle f \rangle'(\langle x \rangle)$).

Как известно [1, 9], в координатно-матричной форме БЛО $\langle A \rangle$ отвечает матрица A $(n+1)$ -го порядка:

$$A = (D_k f_s^j(\bar{x})): \mathbf{P}^{n+1} \rightarrow \mathbf{P}^{n+1}, \quad (16)$$

где $D_k = \partial / \partial x_k$ – оператор частного дифференцирования по переменной $x^k \in \mathbf{P}$ (или, что то же самое, по направлению $e_k \cong \langle e_k \rangle$); $s \in \{\emptyset, +, -\}$, причём $s = \emptyset \Rightarrow f_s^j(x) = f^j(x)$ (см. (13₁)).

Определение 2. БО $\langle f \rangle(\langle x \rangle)$ барилидифференцируемо над полем $\langle \mathbf{P} \rangle_s^n$ во внутренней точке $\langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle)$, если существует барилинейный над полем $\langle \mathbf{P} \rangle_s^n$ оператор

$$\langle A \rangle: \langle \mathbf{P} \rangle_s^n \rightarrow \langle \mathbf{P} \rangle_s^n \quad (17)$$

такой, что $(\forall \Delta \langle x \rangle \in \langle \mathbf{P} \rangle_s^n: \langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle))$

$$\Delta \langle f \rangle(\langle x \rangle) := \langle f \rangle(\langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle) - \langle f \rangle(\langle x \rangle) = \langle A \rangle(\Delta \langle x \rangle) + o(\|\Delta \langle x \rangle\|), \quad (17_1)$$

где $\|\cdot\|$ – любая из норм на конечномерном пространстве $\langle \mathbf{P} \rangle_s^n$. При этом БЛО (17) называется барипроизводной БО (13) в точке $\langle x \rangle$ и обозначается символом $\langle D \rangle \langle f \rangle(\langle x \rangle)$.

Согласно лемме 1 БЛО (17) является оператором бариумножения (гиперболического или эллиптического) на БЭЛ $\langle a \rangle = \langle A \rangle(\langle e \rangle) \in \langle \mathbf{P} \rangle_s^n$. Следовательно, определение 1 эквивалентно такому.

Определение 3. БО $\langle f \rangle(\langle x \rangle)$ s -дифференцируемо (над полем $\langle \mathbf{P} \rangle_s^n$) во внутренней точке $\langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle)$, если существует БЭЛ $\langle a_s \rangle = \langle a_s \rangle(\langle x \rangle) \in \langle \mathbf{P} \rangle_s^n$ такой, что $(\forall \Delta \langle x \rangle \in \langle \mathbf{P} \rangle_s^n : \langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle))$

$$\Delta \langle f \rangle(\langle x \rangle) := \langle f \rangle(\langle x \rangle + \Delta \langle x \rangle) - \langle f \rangle(\langle x \rangle) = \langle a_s \rangle(\langle x \rangle) \cdot \Delta \langle x \rangle + o(\|\Delta \langle x \rangle\|), \quad (17_2)$$

где $\langle a \rangle_s \cdot \langle b \rangle$ – гиперболическое (при $s = +$) или эллиптическое (при $s = -$) произведение двух БЭЛ $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$; $\|\cdot\|$ – любая из норм на конечномерном пространстве $\langle \mathbf{P} \rangle_s^n$. При этом БЭЛ $\langle a_s \rangle(\langle x \rangle) \in \langle \mathbf{P} \rangle_s^n$ называется s -барипроизводной БО $\langle f \rangle(\langle x \rangle)$ в точке $\langle x \rangle$ и обозначается символом ${}^s \langle \mathbf{D} \rangle \langle f \rangle(\langle x \rangle)$ или $\langle f \rangle'_s(\langle x \rangle)$, где $s = \pm$.

Таким образом, s -барипроизводная БО $\langle f \rangle$ в точке $\langle x \rangle$ является оператором s -умножения на БЭЛ $\langle a \rangle = \langle a \rangle(\langle x \rangle)$, т.е.

$${}^s \langle \mathbf{D} \rangle \langle f \rangle(\langle x \rangle) = \langle a \rangle_s(\langle x \rangle). \quad (18)$$

Ниже, для ещё большей простоты изложения (но не в ущерб «идеи»), рассматриваются (если не оговорено противное) поле комплексных чисел $\mathbf{P} = \mathbf{C}$ и эллиптическая бариалгебра (короче, e -бариалгебра) $\langle \mathbf{C} \rangle_-^n$ (для гиперболической бариалгебры $\langle \mathbf{C} \rangle_+^n$ всё аналогично; см. [1]). Из (16), (17₂), (18) вытекает следующее необходимое условие эллиптической дифференцируемости (короче, e -дифференцируемости) БО $\langle f \rangle(\langle x \rangle)$.

Лемма 2. Для e -дифференцируемости БО $\langle f \rangle$ в точке $\langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle(\langle f \rangle)$ необходимы условия: $(\forall j, k \in \mathbf{n})$

$$D_k f^j(\bar{x}) = \text{sgn}(j-k) D_0 f^{\{j-k\}}(\bar{x}), \quad (19)$$

где

$$\{j-k\} = \begin{cases} j-k+n+1, & \text{если } j-k < 0 \\ j-k, & \text{если } j-k \geq 0. \end{cases} \quad (19')$$

Заметим, что при $n=1$ условия (19) совпадают (над полем \mathbf{C}) с условиями голоморфности Коши-Римана в одномерном комплексном анализе. Поэтому можно предположить, что при $n > 1$ e -бариалгебра $\langle \mathbf{C} \rangle_-^n$ является основой для многомерного обобщения комплексного анализа. Центральное место в обосновании этого предположения занимает следующая теорема [1].

Теорема 1 (критерий бариголоморфности). БО $\langle f \rangle(\langle x \rangle) \cong \cong \bar{f}(\bar{x}) = (f^0, f^1, f^2)(\bar{x})$ e -дифференцируемо в $\langle \mathcal{D} \rangle$ тогда и только тогда, когда оно имеет в $\langle \mathcal{D} \rangle$ спектральное представление

$$\langle f \rangle(\langle x \rangle) = \langle f \rangle \left(\sum_{k=0}^n \lambda_{-}^k \langle \varepsilon \rangle_k^{-} \right) = \sum_{k=0}^n f^k(\lambda_{-}^k) \langle \varepsilon \rangle_k^{-}, \quad (20)$$

где $\lambda_{-}^k = \lambda_{-}^k(\bar{x})$, а спектральные компоненты

$$f^k(\lambda_{-}^k) = (f^k \circ \lambda_{-}^k)(\bar{x}) \quad (k = 0, 1, 2) \quad (21)$$

– это дифференцируемые в областях $\Lambda_{-}^k = \lambda_{-}^k(\tilde{\mathcal{D}}) \subseteq \mathbf{C}$ по соответствующим спектральным аргументам $\lambda_{-}^k \in \Lambda_{-}^k$ функции $f_k(\lambda_{-}^k)$, причём

$$\langle \langle \mathbf{D} \rangle \langle f \rangle \rangle(\bar{x}) = \sum_{k \in \mathbf{n}} D_0 f^k(\bar{x}) \langle e \rangle_k = \sum_{k \in \mathbf{n}} D f^k(\lambda_{-}^k) \langle \varepsilon \rangle_k^{-} \quad (20')$$

– бариразложение (1-е равенство) и спектральное представление (2-е равенство) e -производной $\langle \langle \mathbf{D} \rangle \langle f \rangle \rangle(\langle x \rangle)$.

Равенства (21), (21') следует дополнить соотношениями (связями) (11), (11'), а именно,

$$(\forall \langle x \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_{-}^n) (\forall k \in \mathbf{n}):$$

$$\lambda_{-}^k = \lambda_{-}^k(\bar{x}) = \sum_{\beta=0}^n ((\varepsilon_k^{-})^*)^{\beta} x^{\beta}, \text{ или } \bar{\lambda}_{-} = W_{-} \bar{x}; \quad (22)$$

$$(\forall \bar{\lambda}_{-} \in \langle \mathbf{C} \rangle_{-}^n) (\forall \beta \in \mathbf{n}):$$

$$x^{\beta} = x^{\beta}(\bar{\lambda}_{-}) = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^n (\varepsilon_k^{-})^{\beta} \lambda_{-}^k, \text{ или } \bar{x} = W_{-}^{-1} \bar{\lambda}_{-}; \quad (22')$$

где

$$\bar{\lambda}_{-} = (\lambda_{-}^0, \lambda_{-}^1, \dots, \lambda_{-}^n) \in \Lambda_{-}, \Lambda_{-} = \Lambda_{-}^0 \times \Lambda_{-}^1 \times \dots \times \Lambda_{-}^n \subseteq \mathbf{C}^{n+1}$$

– полиоткрытая в \mathbf{C}^{n+1} область,

$$W_{-} = \left(((\varepsilon_k^{-})^*)^{\beta} \right) = \left(\exp \left(-\frac{(2k+1)\pi}{n+1} \beta i \right) \right) \quad (22_1)$$

– невырожденная матрица Вандермонда, а $W_{-}^{-1} = (n+1)^{-1} W_{-}^*$ – обратная к W_{-} матрица. При этом

$$W_{-} W_{-}^{-1} = W_{-}^{-1} W_{-} = (n+1) I, \quad (22_2)$$

т. е. W_{-} — почти унитарная (т. е. унитарная с точностью до постоянного множителя $(n+1)$) матрица.

Из теоремы 1 и представления (12) вытекает следующий её частный случай (когда спектральные компоненты у БО одинаковые).

Следствие 1. а) *Всякому отображению f , определённому в области $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbf{C}$, содержащей спектральное множество*

$$\sigma_-(\langle \mathcal{D} \rangle) = \bigcup_{\langle x \rangle \in \langle \mathcal{D} \rangle} \sigma_-(\langle x \rangle) \subseteq \mathbf{C},$$

где $\langle \mathcal{D} \rangle$ – бариобласть в $\langle \mathbf{C} \rangle_-^n$, отвечает бариотображение

$$\langle f \rangle(\langle x \rangle) := \sum_{k=0}^n f(\lambda_-^k(\bar{x})) \langle \varepsilon \rangle_k^- \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n, \quad (23)$$

определённое на $\langle \mathcal{D} \rangle \subseteq \langle \mathbf{C} \rangle_-^n$ со значениями $\langle y \rangle = \langle f \rangle(\langle x \rangle) \in \langle \mathbf{C} \rangle_-^n$.

б) *Если отображение $f \in \mathbf{C}$ -дифференцируемо в области $\mathcal{D}(f) \subseteq \mathbf{C}$, то БО (23) e -дифференцируемо в бариобласти $\langle \mathcal{D} \rangle \subseteq \langle \mathbf{C} \rangle_-^n$ и при этом его e -барипроизводная*

$$\langle \langle \mathcal{D} \rangle \langle f \rangle \rangle(\langle x \rangle) = \sum_{k=0}^n Df(\lambda_-^k(\bar{x})) \langle \varepsilon \rangle_k^- \in \langle \mathbf{C} \rangle_-^n. \quad (23')$$

Другими словами, БО (23) есть расширение отображения f с алгебры \mathbf{C} на бариалгебру $\langle \mathbf{C} \rangle_-^n$. В то же время теорему 1 и следствие 1 можно рассматривать как ещё одно проявление метода *барисинтеза*, представленного в работах [1], [7].

Для формулировки других следствий, вытекающих из теоремы 1, удобнее воспользоваться естественным изоморфизмом между e -бариалгеброй $\langle \mathbf{C} \rangle_-^n$ порядка n и коммутативной подалгеброй матриц \mathcal{M}_{n+1}^- порядка $(n+1)$ (ради экономии места $n=2, n+1=3$) вида

$$\langle X \rangle^- = \begin{pmatrix} x^0 & -x^2 & -x^1 \\ x^1 & x^0 & -x^2 \\ x^2 & x^1 & x^0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

элементами которых являются комплексные числа. Согласно этому изоморфизму БЭЛ $\langle x \rangle = \langle x_0; x_1, x_2 \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_-^2$ соответствует бариматрица (24), где элементы $x^k = \mu^k(\langle x \rangle)$ – баримоменты (см. (2)) k -го порядка ($k=0, 1, 2$). Таким образом,

$$\langle x \rangle = \langle x_0; x_1, x_2 \rangle \cong \begin{pmatrix} x^0 & -x^2 & -x^1 \\ x^1 & x^0 & -x^2 \\ x^2 & x^1 & x^0 \end{pmatrix} = \langle X \rangle^-. \quad (25)$$

Аналогично БО $\langle y \rangle = \langle f \rangle (\langle x \rangle)$, которое можно переписать так $\langle y_0; y_1, y_2 \rangle = \langle f_0; f_1, f_2 \rangle (\langle x \rangle)$ или так $(y^0, y^1, y^2) = (f^0, f^1, f^2)(\bar{x})$, изоморфно отображению

$$\langle Y \rangle^- = \langle F \rangle^- (\langle X \rangle^-) = \begin{pmatrix} f^0 & -f^2 & -f^1 \\ f^1 & f^0 & -f^2 \\ f^2 & f^1 & f^0 \end{pmatrix} (\langle X \rangle^-): \mathcal{M}_{n+1}^- \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}^-, \quad (26)$$

где

$$y^\beta = f^\beta (\langle X \rangle^-) = f^\beta (\bar{x}): \mathcal{M}_{n+1}^- \rightarrow \mathbf{C} \quad (\beta = 0, 1, 2). \quad (26_1)$$

Далее, ввиду (10), (11) БО (13) можно посредством БК_c (11) представить ещё так:

$$\langle y \rangle = \sum_{k=0}^2 \lambda_-^k (\bar{y}) \langle \varepsilon \rangle_k^- = \langle f \rangle \left(\sum_{k=0}^2 \lambda_-^k (\bar{x}) \langle \varepsilon \rangle_k^- \right),$$

или

$$(y^0, y^1, y^2) = (f^0, f^1, f^2) \left(\sum_{k=0}^2 \lambda_-^k (\bar{x}) \langle \varepsilon \rangle_k^- \right),$$

где для $k = 0, 1, 2$

$$\lambda_-^k (\bar{y}) = \sum_{\beta=0}^2 ((\varepsilon_k^-)^\beta)^* y^\beta, \quad \lambda_-^k (\bar{x}) = \sum_{\beta=0}^2 ((\varepsilon_k^-)^\beta)^* x^\beta,$$

$$\langle \varepsilon \rangle_k^- = (3)^{-1} \langle -1; \varepsilon_k^-, \varepsilon_k^-, \varepsilon_k^- \rangle \varepsilon_k^- = \exp \left(\frac{(2k+1)\pi}{3} i \right).$$

Отсюда согласно (26), (26₁),

$$\begin{pmatrix} y^0 & -y^2 & -y^1 \\ y^1 & y^0 & -y^2 \\ y^2 & y^1 & y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^0 & -f^2 & -f^1 \\ f^1 & f^0 & -f^2 \\ f^2 & f^1 & f^0 \end{pmatrix} \left(\sum_{k=0}^2 \lambda_-^k (\bar{x}) \langle \varepsilon \rangle_k^- \right), \quad (27)$$

где

$$\langle \varepsilon \rangle_k^- \cong \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -(\varepsilon_k^-)^2 & -\varepsilon_k^- \\ \varepsilon_k^- & -1 & -(\varepsilon_k^-)^2 \\ (\varepsilon_k^-)^2 & \varepsilon_k^- & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}^- \quad (k = 0, 1, 2)$$

– спектральный e -базис в \mathcal{M}_3^- .

Условие e -дифференцируемости(19) в матричной форме примет вид

$$D\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} D_0 f^0 & D_1 f^0 & D_2 f^0 \\ D_0 f^1 & D_1 f^1 & D_2 f^1 \\ D_0 f^2 & D_1 f^2 & D_2 f^2 \end{pmatrix}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} D_0 f^0 & -D_0 f^2 & -D_0 f^1 \\ D_0 f^1 & D_0 f^0 & -D_0 f^2 \\ D_0 f^2 & D_0 f^1 & D_0 f^0 \end{pmatrix}(\bar{x}), \quad (19')$$

а условие (20) – вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_-^0 & -\lambda_-^2 & -\lambda_-^1 \\ \lambda_-^1 & \lambda_-^0 & -\lambda_-^2 \\ \lambda_-^2 & \lambda_-^1 & \lambda_-^0 \end{pmatrix}(\bar{y}) = \begin{pmatrix} f^0 \circ \lambda_-^0 & -f^2 \circ \lambda_-^2 & -f^1 \circ \lambda_-^1 \\ f^1 \circ \lambda_-^1 & f^0 \circ \lambda_-^0 & -f^2 \circ \lambda_-^2 \\ f^2 \circ \lambda_-^2 & f^1 \circ \lambda_-^1 & f^0 \circ \lambda_-^0 \end{pmatrix}(\bar{x}). \quad (20')$$

Теперь рассмотрим e -векторные поля, порождённые строками e -бариматрицы (26):

$$\begin{aligned} \bar{f}_-^0(\bar{x}) &= (f^0, -f^2, -f^1)(\bar{x}), & \bar{f}_-^1(\bar{x}) &= (f^1, f^0, -f^2)(\bar{x}), \\ \bar{f}_-^2(\bar{x}) &= (f^2, f^1, f^0)(\bar{x}). \end{aligned} \quad (28)$$

и e -векторные поля, порождённые её столбцами:

$$\begin{aligned} \bar{f}_0^-(\bar{x}) &= (f^0, f^1, f^2)^\Gamma(\bar{x}), & \bar{f}_1^-(\bar{x}) &= (-f^2, f^0, f^1)^\Gamma(\bar{x}), \\ \bar{f}_2^-(\bar{x}) &= (-f^1, -f^2, f^0)^\Gamma(\bar{x}). \end{aligned} \quad (29)$$

Из теоремы 1 вытекают следующие свойства этих полей.

Следствие 2. Если БО $\langle y \rangle = \langle f \rangle(\langle x \rangle)$ e -дифференцируемо в $\langle \mathcal{D} \rangle$, то в области $\mathcal{D} \cong \langle \mathcal{D} \rangle$:

а) векторные поля (28) – потенциальные, т.е. существуют потенциалы $U_-^k(\bar{x})$:

$$\bar{\nabla} U_-^k(\bar{x}) = \bar{f}_-^k(\bar{x}) \quad (k = 0, 1, 2; \bar{\nabla} = (D_0, D_1, D_2));$$

б) векторные поля (29) – попарнокоммутирующие между собой, т.е.

$$D\bar{f}_k^-(\bar{x})\left(\bar{f}_j^-(\bar{x})\right) = D\bar{f}_j^-(\bar{x})\left(\bar{f}_k^-(\bar{x})\right) \quad (j, k = 0, 1, 2).$$

Отсюда (см. а)) и из (29) следует, что

$$\bar{f}_k^-(\bar{x}) = \left(D_k U_-^0, D_k U_-^1, D_k U_-^2\right)^\Gamma(\bar{x}) \quad (k = 0, 1, 2), \quad (29')$$

или в матричной форме

$$\bar{f}_-^-(\bar{x}) = \begin{pmatrix} D_0 U_-^0 & D_1 U_-^0 & D_2 U_-^0 \\ D_0 U_-^1 & D_1 U_-^1 & D_2 U_-^1 \\ D_0 U_-^2 & D_1 U_-^2 & D_2 U_-^2 \end{pmatrix}(\bar{x}),$$

где согласно свойству коммутативности вектор-столбцов (29') (см. б))

$$\begin{pmatrix} D_{k0}U_-^0 & D_{k1}U_-^0 & D_{k2}U_-^0 \\ D_{k0}U_-^1 & D_{k1}U_-^1 & D_{k2}U_-^1 \\ D_{k0}U_-^2 & D_{k1}U_-^2 & D_{k2}U_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_jU_-^0 \\ D_jU_-^1 \\ D_jU_-^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{j0}U_-^0 & D_{j1}U_-^0 & D_{j2}U_-^0 \\ D_{j0}U_-^1 & D_{j1}U_-^1 & D_{j2}U_-^1 \\ D_{j0}U_-^2 & D_{j1}U_-^2 & D_{j2}U_-^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_kU_-^0 \\ D_kU_-^1 \\ D_kU_-^2 \end{pmatrix}.$$

$$(D_{kj} = D_k D_j; j, k = 0, 1, 2),$$

В условиях теоремы 1 на бариобласти $\langle \mathcal{D} \rangle \cong \tilde{\mathcal{D}}$ имеет место представление (20), где спектральные компоненты

$$(f^k \circ \lambda_-^k)(\bar{x}) = f^k(\lambda_-^k(\bar{x})) \quad (\bar{x} \in \tilde{\mathcal{D}})$$

голоморфные, а значит, и конформные, в областях $\Lambda_-^k = \lambda_-^k(\tilde{\mathcal{D}}) \subseteq \mathbf{C}$ относительно аргументов $\lambda_-^k \in \Lambda_-^k$ функции ($k = 0, 1, 2$). Затем для любых БЭЛ $\langle x \rangle_\alpha \cong \bar{x}_\alpha \in \tilde{\mathcal{D}}$ ($\alpha = 1, 2$) справедливо (ввиду (22₂)) отношение инвариантности (при переходе от БК_c $x^k \in \mathcal{D}^k \subseteq \mathbf{C}$ к БК_c $\lambda_-^k \in \Lambda_-^k \subseteq \mathbf{C}$ по формуле $\bar{\lambda}_{-\alpha} = W_- \bar{x}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$)):

$$\frac{\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle}{\|\bar{x}_1\| \|\bar{x}_2\|} = \frac{\langle \bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2} \rangle}{\|\bar{\lambda}_{-1}\| \|\bar{\lambda}_{-2}\|} \subseteq \mathbf{C}, \quad (30)$$

где $\langle a, b \rangle = \sum_{\alpha=0}^2 a^\alpha (b^\alpha)^*$ – скалярное произведение элементов $a, b \in \mathbf{C}^3$,

$\|a\| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ — норма элемента a , и потому $|\langle a, b \rangle| / (\|a\| \|b\|) \leq 1$.

Из (30) следует, что

$$\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \langle \bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2} \rangle \in \mathbf{R}, \quad (31)$$

и в этом случае отношение инвариантности (30) можно переписать так:

$$\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \varphi(\bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2}), \quad (30^*)$$

где (по определению)

$$\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \arccos \frac{\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle}{\|\bar{x}_1\| \|\bar{x}_2\|}, \quad \varphi(\bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2}) = \arccos \frac{\langle \bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2} \rangle}{\|\bar{\lambda}_{-1}\| \|\bar{\lambda}_{-2}\|} \quad (30_1)$$

– углы между соответствующими векторами. Здесь следует отметить, что условие (31) выполняется для любых элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbf{R}^3 \subset \mathbf{C}^3$ (или $\langle \bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2} \rangle \in \mathbf{R}^3 \subset \mathbf{C}^3$). В случае, когда условие (31) не выполняется (т.е. $\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle \notin \mathbf{R}$), ‘углы’ из отношения инвариантности (30^{*}) определяются следующим образом [10]:

$$\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \varphi(\bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2}) = \text{Arc cos } z_{12} = -i \text{Ln} \left(z_{12} + \sqrt{(z_{12})^2 - 1} \right), \quad (30_2)$$

где $z_{12} = \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle / \|\bar{x}_1\| \|\bar{x}_2\| = \langle \bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2} \rangle / \|\bar{\lambda}_{-1}\| \|\bar{\lambda}_{-2}\| \in \mathbf{C}$.

Из сказанного следует

Лемма 1. Величина угла между любыми двумя БЭЛ инвариантна относительно перехода (посредством формул (22) и (22')) от БК_e x^β ($\beta \in \{0, 1, 2\}$) к БК_c λ_-^k ($k \in \{0, 1, 2\}$) БЭЛ $\langle x \rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_-^2$.

Пусть в $\langle \mathcal{D} \rangle \subseteq \langle \mathbf{C} \rangle_-^2$ заданы две гладкие кривые $\langle \Gamma_\alpha \rangle$ ($\alpha = 1, 2$) посредством БК_e и БК_c:

$$\langle \Gamma_\alpha \rangle: \bar{x}_\alpha = \bar{x}_\alpha(t) = \sum_{k=0}^2 \lambda_\alpha^k(t) \langle \varepsilon \rangle_k^-, \quad (32_e)$$

$$\tilde{\Gamma}_\alpha: \bar{\lambda}_\alpha = \bar{\lambda}_\alpha(t) = \left(\lambda_\alpha^k(t) = \sum_{\beta=0}^2 \left((\varepsilon_k^-)^* \right)^\beta x_\alpha^\beta(t), k = 0, 1, 2 \right), \quad (32_c)$$

где $t \in \mathbf{R}$ – параметр кривой $\langle \Gamma_\alpha \rangle$, причём $\bar{x}_\alpha(0) = \bar{x}_0 \cong \bar{\lambda}_\alpha(0) = \bar{\lambda}_0$ – общая (начальная) точка этих кривых (знак эллиптичности «-» для простоты опущен); и пусть

$$\langle \Gamma'_\alpha \rangle: \bar{x}'_\alpha = \bar{x}'_\alpha(t) = \sum_{k=0}^2 f^k(\lambda_\alpha^k(t)) \langle \varepsilon \rangle_k^-, \quad (32'_e)$$

$$\tilde{\Gamma}'_\alpha: \bar{\lambda}'_\alpha = \bar{\lambda}'_\alpha(t) = \left(f^k(\lambda_\alpha^k(t)), k = 0, 1, 2 \right), \quad (32'_c)$$

– образы этих кривых при e -дифференцируемом в $\langle \mathcal{D} \rangle$ БО $\langle f \rangle$, где

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x}) = \sum_{k=0}^2 f^k(\lambda^k) \langle \varepsilon \rangle_k^-, \quad \bar{\lambda}' = \bar{f}(\bar{\lambda}) = (f^k(\lambda^k), k = 0, 1, 2) \quad (33)$$

– образы точек при этом отображении.

Тогда (при условии $(\bar{\langle D \rangle} \langle f \rangle) \langle \langle x \rangle \rangle \neq \langle 0 \rangle$ в $\langle \mathcal{D} \rangle$)

$$\dot{\bar{x}}_\alpha = \left(\dot{\bar{x}}_\alpha(t) = D\bar{x}_\alpha(t) = \sum_{k=0}^2 D\lambda_\alpha^k(t) \langle \varepsilon \rangle_k^- \right) \Big|_{t=0}, \quad (34_e)$$

$$\dot{\bar{\lambda}}_\alpha = \left(\dot{\bar{\lambda}}_\alpha(t) = D\bar{\lambda}_\alpha(t) = (D\lambda_\alpha^k(t), k = 0, 1, 2) \right) \Big|_{t=0}, \quad (34_c)$$

$$\dot{\bar{x}}'_\alpha = \left(\dot{\bar{x}}'_\alpha(t) = D\bar{x}'_\alpha(t) = \sum_{k=0}^2 Df^k(\lambda_\alpha^k) D\lambda_\alpha^k(t) \langle \varepsilon \rangle_k^- \right) \Big|_{t=0}, \quad (34'_e)$$

$$\dot{\bar{\lambda}}'_\alpha = \left(\dot{\bar{\lambda}}'_\alpha(t) = D\bar{\lambda}'_\alpha(t) = (Df^k(\lambda_\alpha^k)(t) D\lambda_\alpha^k(t), k = 0, 1, 2) \right) \Big|_{t=0} \quad (34'_c)$$

– касательные БЭЛ к кривым $\langle \Gamma_\alpha \rangle$ и $\langle \Gamma'_\alpha \rangle$ в точках $\bar{x}_0 \cong \bar{\lambda}_0$ и $\bar{x}'_0 \cong \bar{\lambda}'_0$, соответственно. В силу (34_e), (34_c) и спектральных свойств e -барбазиса (9) (см. также отношения инвариантности (30*))

$$\cos \varphi(\dot{\bar{x}}_1, \dot{\bar{x}}_2) = \cos \varphi(\dot{\bar{\lambda}}_1, \dot{\bar{\lambda}}_2) = \frac{\sum_{k=0}^2 D\lambda_1^k(t) (D\lambda_2^k(t))^*}{\left(\sum_{k=0}^2 |D\lambda_1^k(t)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^2 |D\lambda_2^k(t)|^2 \right)^{1/2}} \Bigg|_{t=0} \cdot \quad (35)$$

Аналогично (но в силу (34'_e), (34'_c))

$$\begin{aligned} \cos \varphi(\dot{\bar{x}}'_1, \dot{\bar{x}}'_2) &= \cos \varphi(\dot{\bar{\lambda}}'_1, \dot{\bar{\lambda}}'_2) = \\ &= \frac{\sum_{k=0}^2 |Df^k(\lambda_0^k)|^2 D\lambda_1^k(t) (D\lambda_2^k(t))^*}{\left(\sum_{k=0}^2 |Df_0^k(\lambda_1^k)|^2 |D\lambda_1^k(t)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^2 |Df^k(\lambda_0^k)|^2 |D\lambda_2^k(t)|^2 \right)^{1/2}} \Bigg|_{t=0} \end{aligned} \quad (35')$$

Из (35) и (35') следует, что величина (30) инвариантна относительно e -дифференцируемого в $\langle \mathcal{D} \rangle$ БО $\langle f \rangle$, что эквивалентно равенству

$$\cos \varphi(\dot{\bar{x}}_1, \dot{\bar{x}}_2) = \cos \varphi(\dot{\bar{x}}'_1, \dot{\bar{x}}'_2) \quad (36)$$

для любых гладких кривых (32_e) ((32_c)), тогда и только тогда, когда

$$\left| Df^k(\lambda_0^k) \right| = \rho(\bar{\lambda}_0) = \text{const} \quad (k \in \{0, 1, 2\}), \quad (37)$$

где $\rho_0 = \rho(\bar{\lambda}_0)$ – независящая от индекса $k \in \{0, 1, 2\}$ (а значит, и от индивидуальных БК_c λ_0^k , $k \in \{0, 1, 2\}$) постоянная. Очевидно, что условие (37) эквивалентно условию (*бариконформности*)

$$Df^k(\lambda_0^k) = \rho_0 \exp(\theta_0^k i) \quad (k \in \{0, 1, 2\}), \quad (37')$$

где $\rho_0 = \rho(\bar{\lambda}_0) = \left| Df^k(\lambda_0^k) \right|$ зависит только от точки $\bar{\lambda}_0 \cong \bar{x}_0$; $\theta_0^k = \theta^k(\lambda_0^k) = \arg(Df^k(\lambda_0^k))$ зависит и от точки $\bar{\lambda}_0 \cong \bar{x}_0$ и от индекса $k \in \{0, 1, 2\}$; множество (37') – спектр e -барипроизводной $(\langle D \rangle \langle f \rangle)(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{x}_0 \cong \bar{\lambda}_0$.

Тем самым, имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. При условии (37) ((37')) величина угла между любыми двумя гладкими кривыми (32_e) ((32_c)) инвариантна относительно e -дифференцируемого в $\langle \mathcal{D} \rangle$ БО $\langle f \rangle \cong \bar{f} = (f^0, f^1, f^2)$.

В качестве простейшего БО, удовлетворяющего условиям леммы 2, рассматривается линейное e -дифференцируемое БО

$$\bar{f}(\bar{\lambda}_-) = (f^k(\lambda_-^k))|_0^2: \quad f^k(\lambda_-^k) = a_-^k + \rho \exp(\theta_-^k i) \lambda_-^k \quad (k \in \{0, 1, 2\}), \quad (38)$$

где параметры $a_-^k \in \mathbf{C}$, $\theta_-^k \in \mathbf{R}$ ($k \in \{0, 1, 2\}$), $\rho \in \mathbf{R}_+$ не зависят от $\lambda_-^k \in \mathbf{C}$ и потому для каждого $\lambda_-^k \in \mathbf{C}$

$$Df^k(\lambda_-^k) = \rho \exp(\theta_-^k i) \quad (k \in \{0, 1, 2\}),$$

т.е. выполняется условие бариконформности (37'), а вместе с ним утверждение леммы 2. Если теперь, согласно (10), ввести БЭЛ

$$\langle a \rangle = \sum_{k=0}^2 a_-^k \langle \varepsilon \rangle_k^-, \quad \langle b \rangle = \sum_{k=0}^2 \exp(\theta_-^k i) \langle \varepsilon \rangle_k^-, \quad (39)$$

то БО (38) переписется в эквивалентной барикоординатной форме так:

$$\langle y \rangle = \langle f \rangle(\langle x \rangle) = \langle a \rangle + \rho \langle b \rangle \langle x \rangle, \quad (38')$$

или (относительно естественных БК) так:

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) = \bar{a} + \rho \bar{b} \bar{x},$$

или покомпонентно в барикоординатах так:

$$\begin{aligned} y_0 &= f_0(\bar{x}) = a^0 + \rho (b^0 x^0 - b^2 x^1 - b^1 x^2), \\ y_1 &= f_1(\bar{x}) = \frac{a^1 + \rho (b^1 x^0 + b^0 x^1 - b^2 x^2)}{a^0 + \rho (b^0 x^0 - b^2 x^1 - b^1 x^2)}, \\ y_2 &= f_2(\bar{x}) = \frac{a^2 + \rho (b^2 x^0 + b^1 x^1 + b^0 x^2)}{a^1 + \rho (b^1 x^0 + b^0 x^1 - b^2 x^2)}, \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$a^\beta = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 (\varepsilon_k^-)^\beta a_-^k, \quad b^\beta = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 (\varepsilon_k^-)^\beta b_-^k \quad (\beta \in \{0, 1, 2\}). \quad (41)$$

Из сказанного вытекает следующее уже нетривиальное утверждение (свойство конформности многомерных дробно-линейных отображений).

Теорема 2. Система e -дробно-линейных функций вида (40), (41) является в унитарном пространстве \mathbf{C}^3 конформным – сохраняющим величину (см. (30))

$$\cos \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\langle \bar{x}_1, \bar{x}_2 \rangle}{\|\bar{x}_1\| \|\bar{x}_2\|} = \frac{\langle \bar{\lambda}_{-1}, \bar{\lambda}_{-2} \rangle}{\|\bar{\lambda}_{-1}\| \|\bar{\lambda}_{-2}\|} = \cos \varphi(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2),$$

отображением.

Это утверждение можно расценивать как обобщение на многомерный случай свойства конформности одномерных дробно-линейных преобразований [10]. К этому следуют добавить, что в работе [1] установлены и другие свойства e -дифференцируемого в $\langle \mathcal{D} \rangle$ БО $\langle f \rangle$, равносильные свойствам голоморфной функции одного комплексного переменного (таким как сохранение области, принцип максимума модуля и т. д., но об этом во второй части работы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А.В.* Многомерный барианализ и его приложения. Часть 1. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2005. 432 с.
2. *Бородин А.В.* Частично квазисвязные множества и барианализ (приложения). Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2013. 484 с.
3. *Бородин А.В.* Одномерный барилинейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1997. 177 с.
4. *Бородин А.В.* Барианализ и проективные пространства // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2015. С. 9–31.
5. *Бородин А.В.* Об одном классе кватернионных алгебраических уравнений // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 9. Ярославль: Изд-во ЯГТУ. 2014. С. 5 – 16.
6. *Бородин А.В.* Бариоперационный метод решения алгебраических уравнений // Ярослав. пед. вестник. 2010. Т. 3(Естественные науки), №2. С. 7-14.
7. *Бородин А.В.* Метод спектрального барисинтеза и вложение n -мерного диффеоморфизма в векторное поле // Ярослав. пед. вестник. 2013. Т. 3 (Естественные науки), №3. С. 61–67.
8. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: МИР. 1975. 443 с.
9. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: МИР, 1972. 824 с.
10. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1985. 336 с.

УДК 514.76

А. В. Букушева

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, г. Саратов, *e-mail: bukusheva@list.ru*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯХ СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

На распределении D и кораспределении D^ многообразия M с субримановой структурой контактного типа (M, ξ, η, g, D) определяются продолженные почти контактные метрические структуры. Исследуются связи между полученными структурами.*

Ключевые слова: *субриманова структура контактного типа, распределения и кораспределения субримановых многообразий, продолженные почти контактные метрические структуры.*

A. V. Bukusheva

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University
Russia, Saratov, *e-mail: bukusheva@list.ru*

GEOMETRIC STRUCTURES ON THE DISTRIBUTIONS OF SUB-RIEMANNIAN MANIFOLDS

On the distribution D and codistribution D^ of a manifold M with a sub-Riemannian structure of contact type $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, extended almost contact metric structures are defined. We study the obtained structures.*

Keywords: *sub-Riemannian structure of contact type, distribution and codistribution of sub-Riemannian manifolds, extended almost contact metric structures.*

Введение. Для случая почти контактного метрического многообразия в работе [5] на распределении D была определена структура, названная геодезической пульверизацией связности над распределением. Полученная структура представляет собой аналог геодезической пульверизации пространства касательного расслоения TM . Проекции интегральных кривых задаваемого тем самым поля совпадают с допустимыми геодезическими, физический смысл которых заключается в том, что они являются траекториями движения механической системы со связями. В работе [9] аналогичные конструкции были получены для кораспределения D^* почти контактного метрического многообразия. Кораспределение D^* образовано всеми допустимыми 1-формами ($\lambda \in D^* \leftrightarrow \lambda(\vec{\xi}) = 0$) и является нечетномерным аналогом кокасательного расслоения T^*M . Несмотря на то что при изучении геометрии кокасательного расслоения T^*M , как правило, используются те же методы, что и при изучении касательного расслоения TM , пространство кокасательного расслоения наделено канонической симплектической структурой, что является важным обстоятельством с точки зрения применения геометрии кокасательного расслоения в механике и физике. В той же мере существование на кораспределении D^* канонической допустимой симплектической структуры [9] позволяет рассматривать D^* как фазовое пространство неголономной механической системы.

В настоящей работе рассматривается субриманово многообразие контактного типа M , т.е. гладкое многообразие размерности n с заданной на нем субримановой структурой контактного типа $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$. Так же как и в случае контактного метрического многообразия, на распределении и кораспределении субриманова многообразия определяются почти контактные метрические структуры. Исследуются некоторые связи между полученными структурами.

1. Почти контактная метрическая структура на распределении субриманова многообразия. Рассмотрим гладкое многообразие M с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η и $\vec{\xi}$ – 1-форма и единичное векторное поле, порождающие, соответственно, ортогональные между собой распределения D и D^\perp , и связанные соотношением $\eta(\vec{\xi}) = 1$. Внутренней линейной связностью ∇ [1-4] на субримановом

многообразии называется дифференцирование $\nabla: \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, наделенное следующим условиям:

$$1) \nabla_{f_1 \vec{x} + f_2 \vec{y}} = f_1 \nabla_{\vec{x}} + f_2 \nabla_{\vec{y}},$$

$$2) \nabla_{\vec{x}} f \vec{y} = (\vec{x} f) \vec{y} + f \nabla_{\vec{x}} \vec{y},$$

$$3) \nabla_{\vec{x}} (\vec{y} + \vec{z}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} + \nabla_{\vec{x}} \vec{z},$$

где $\Gamma(D)$ - модуль векторных полей, принадлежащих в каждой точке распределению D .

Карта $k(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$; $i, j, k = 2n-1$) названа адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6-8]. Для проектора $P: TM \rightarrow D$, определенного разложением $TM = D \oplus D^\perp$, векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и порождают распределение $D: D = \text{span}(\vec{e}_a)$.

Коэффициенты связности ∇ задаются соотношениями $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Равенства $\vec{e}_a = A_a^{a'} \vec{e}'_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, влекут формулы преобразования для коэффициентов внутренней связности: $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^c \Gamma_{a'b'}^{c'} + A_c^c \vec{e}_a A_b^{b'}$.

Кручение и кривизна внутренней связности - допустимые тензорные поля:

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

$$R(\vec{x}, \vec{y}) \vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Тензор $R(\vec{x}, \vec{y}) \vec{z}$ носит название тензора Схоутена. В координатах тензора Схоутена приобретает следующий вид: $R_{abc}^d = 2\vec{e}_a [\Gamma_{bc}^d]_c + 2\Gamma_{[a|e|}^d \Gamma_{b]}^e$.

Роль связности Леви-Чивита в нашем случае играет внутренняя симметричная связность ∇ такая, что $\nabla g = 0$, где g - допустимое тензорное поле, задаваемое метрическим тензором исходной почти контактной метрической структуры. Будем называть связность ∇ внутренней метрической связностью. Коэффициенты внутренней связности задаются равенствами

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_a g_{bc}).$$

Тензор t типа (p, q) , субриманова многообразия называется допустимым к распределению D , если t обращается в нуль каждый раз, когда среди его аргументов встречаются $\vec{\xi}$ или η .

Пусть D - распределение субриманова многообразия контактного типа. Векторные поля $(\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$ определяют [5] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$ - дуальное поле кобазисов. Выполняются структурные уравнения [5]:

$$[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d}R_{bad}^c\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n] = x^{n+d}\partial_n\Gamma_{aa}^c\partial_{n+c},$$

$$[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c\partial_{n+c},$$

где R_{bad}^c - компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах.

Имеет место

Предложение 1 [5]. Для внутренней связности с тензором кривизны Схоутена $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ и всех $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ и $\vec{p} \in D$ имеют место следующие равенства.

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{y}]^h - \{R(\vec{x}, \vec{y})\vec{p}\}^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [\vec{x}, \vec{\xi}]^h + \{P(\vec{x}, \vec{p})\}^v,$$

$$[\vec{x}^h, \vec{y}^v] = (\nabla_{\vec{x}}\vec{y})^v,$$

$$[\vec{x}^v, \vec{\xi}^h] = [\vec{x}, \vec{\xi}]^v.$$

Зададим на многообразии D почти контактную структуру $(\vec{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая $J\vec{x}^h = \vec{x}^v$, $J\vec{x}^v = -\vec{x}^h$. Здесь $\pi: D \rightarrow M$ - естественная проекция. Определим, далее, на многообразии M метрику \tilde{g} , подчиняющуюся равенствам:

$$\tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{y}^v) = g(\vec{x}, \vec{y}), \quad \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{y}^v) = \tilde{g}(\vec{x}^h, \vec{u}) = \tilde{g}(\vec{x}^v, \vec{u}) = 0.$$

Имеют место следующее предложение.

Предложение 2 [5]. Структура $(\vec{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти контактной метрической структурой.

2. Структуры на кораспределении субриманова многообразия.

Введем на кораспределении D^* субриманова многообразия структуру дифференцируемого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M карту $\vec{K}(x^\alpha, p_a)$ на многообразии D^* , где p_a - координаты допустимого ковектора в кобазисе

$$(dx^\alpha, \eta = dx^n + \Gamma_a^n dx^\alpha).$$

Заданную сверхкарту также будем называть адаптированной.

Поставим каждому допустимому векторному полю $\vec{x} \in \Gamma(D)$, $\vec{x} = x^\alpha \vec{e}_\alpha$, и каждому допустимому ковекторному полю $\lambda \in \Gamma(D^*)$, $\lambda = \lambda_a dx^\alpha$, векторные поля $\vec{x}^h = x^\alpha \vec{f}_a$, $\lambda^v = \lambda_a \partial^a$ соответственно, где

$$\vec{f}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n + p_b \Gamma_{ac}^b \partial^c, \quad \partial^a = \frac{\partial}{\partial p_a}.$$

Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\vec{f}_a, \vec{f}_b] = 2\omega_{ba}\vec{u} + p_c R_{bae}^c \partial^e,$$

$$[\vec{f}_a, \partial^b] = -\Gamma_{ac}^b \partial^c,$$

$$[\vec{f}_a, \partial_n] = -p_b \partial_n \Gamma_{ac}^b \partial^c.$$

На тотальном пространстве D^* векторного расслоения (D^*, π, M) , где $\pi: D^* \rightarrow M$ - естественная проекция, таким образом, возникает гладкое распределение $\tilde{D} = H \oplus V$, где $H = \text{span}(\vec{f}_a)$, $V = \text{span}(\partial^a)$. Определим на пространстве D^* метрический тензор \tilde{G} , полагая

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\vec{x}^h, \vec{y}^h) &= \tilde{G}(\lambda^v, \mu^v) = g(\vec{x}, \vec{y}), \quad \tilde{G}(\partial_n, \partial_n) = 1, \\ \tilde{G}(\vec{x}^h, \mu^v) &= \tilde{G}(\vec{x}^h, \partial_n) = \tilde{G}(\lambda^v, \partial_n) = 0, \end{aligned}$$

и допустимую почти комплексную структуру \tilde{J} , таким образом, что

$$\tilde{J}\vec{x}^h = \lambda^v, \quad \tilde{J}\lambda^v = -\vec{x}^h, \quad \tilde{J}(\vec{u}) = \vec{0}.$$

Здесь $\vec{x} = x^a \vec{e}_a$, $\lambda_a = g_{ab} x^b$, $\mu_a = g_{ab} y^b$.

Непосредственным вычислением проверяется справедливость следующего предложения.

Предложение 3. Система $(D^*, \vec{u} = \partial_n, \mu = \eta \circ \pi_*, \tilde{J}, \tilde{G}, \tilde{D})$ является почти контактной метрической структурой.

Назовем полученную структуру продолженной (до распределения D^*) почти контактной метрической структурой.

Допустимые симплектические структуры на распределении D и кораспределении D^* субриманова многообразия M определим, соответственно, равенствами $\Omega(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{g}(\vec{x}, \tilde{J}\vec{y})$, $\tilde{\Omega}(\vec{x}, \vec{y}) = \tilde{G}(\vec{x}, \tilde{J}\vec{y})$.

Укажем на некоторые связи между продолженными структурами, определяемыми на D и D^* . Введем в рассмотрение отображение $\psi: D \rightarrow D^*$, определяемое равенством $\psi(\vec{x})(\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{y})$. Очевидно, что отображение ψ является диффеоморфизмом гладких многообразий. Используя координатное выражение для отображения ψ , убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $\lambda = p_a dx^a$ - форма Лиувилля на кораспределении D^* и $\vec{v} = x^{n+a} \partial_{n+a}$ - поле Лиувилля на распределении D . Тогда выполняется равенство $d\psi^* \lambda(\vec{v}; \cdot) = \psi^* \lambda(\cdot)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bukusheva A.V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution / A.V. Bukusheva, S.V. Galaev // Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), no 2. P. 13-22.
2. Букушева А.В. О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Математика. Механика. 2013. №.15. С. 8-11.
3. Букушева А.В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т.14, №.3. С.247-251.
4. Букушева А.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №. 3. С. 17-22.

5. Букушева А.В. Связности над распределением и геодезические пульверизации / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Изв. вузов. Математика. 2013. №4. С. 10-18.
6. Галаев С.В. N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Математика. 2017. №3. С. 15-23.
7. Галаев С.В. Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях каскадных многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 3. С. 263-272.
8. Галаев С.В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Мат. заметки СВФУ. 2015. Т. 22, №1. С. 25-34.
9. Галаев С.В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138-147.

УДК 514.76

С. В. Галаев

Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Россия, г. Саратов, *e-mail*: sgalaev@mail.ru

**О ГЕОМЕТРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
СУБРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ
С НЕНУЛЕВЫМ ТЕНЗОРОМ ВАГНЕРА-СХОУТЕНА**

Вводится понятие тензора Вагнера-Схоутена субриманова многообразия. На распределении субриманова многообразия с ненулевым тензором Вагнера-Схоутена определяется продолженная Би-метрическая структура. Изучаются свойства полученной структуры.

Ключевые слова: субриманово многообразие контактного типа, внутренняя геометрия субриманова многообразия, продолженная почти контактная структура с Би-метрикой, тензор Вагнера-Схоутена.

S. V. Galaev

G.N. Chernyshevsky National Research Saratov State University
Russia, Saratov, *e-mail*: sgalaev@mail.ru

**ON GEOMETRY OF DISTRIBUTIONS
OF SUB-RIEMANNIAN MANIFOLDS
WITH NONZERO WAGNER-SCHOUTEN TENSOR**

The notion of Wagner-Schouten tensor of sub-Riemannian manifold is introduced. The extended B-metric structure is defined on distribution of sub-Riemannian manifold with non-zero Wagner-Schouten tensor. The properties of obtained structure are studied.

Keywords: sub-Riemannian manifold of contact type, interior geometry of sub-Riemannian manifold, extended almost contact structure with B-metric, Wagner-Schouten tensor.

Исследование почти контактных Би-метрических структур начинается с основополагающей работы [1], в которой дано определение Би-метрических многообразий и предложена классификация таких многообразий, основанная на выделении инвариантных подпространств в пространстве тензоров специального вида. В соответствии с указанной классификацией выделяются 2^{11} классов Би-метрических многообразий и, в том числе – 11 базисных классов. В настоящей работе исследуются почти контактные Би-метрические структуры, определяемые на распределениях субримановых многообразий с ненулевым тензором Вагнера-Схоутена. Под субримановым многообразием контактного типа понимается гладкое многообразие M размерности n с заданной на нем субримановой структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, g, D)$, где η – 1-форма, порождающая распределение D : $D = \ker(\eta)$; $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающее оснащение D^\perp распределения D : $D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$; g – риманова метрика на многообразии M , относительно которой распределения D и D^\perp взаимно ортогональны. При этом выполняются равенства $\eta(\vec{\xi}) = 1$ и $g(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = 1$. На основе конструкции продолжения [2-9] почти контактных метрических структур, в работе [9] на тотальном пространстве D векторного расслоения (D, π, M) была определена почти контактная структура с Би-метрикой, названная продолженной структурой. В работе [9] рассматривался случай субриманова многообразия с нулевым тензором Схоутена. В предлагаемой работе исследуется случай субриманова многообразия с ненулевым тензором Схоутена. Распределение D такого многообразия называется распределением ненулевой кривизны. Значения ассоциированного с продолженной Би-метрической структурой тензорного поля F [9] совпадают с комитантами инвариантов внутренней геометрии [6] субримановых многообразий. Таких инвариантов четыре: тензор кривизны Схоутена R ; дифференциальная 2-форма $\omega = d\eta$; производная Ли $L_{\vec{\xi}}g$ метрического тензора g вдоль векторного поля $\vec{\xi}$; тензорное поле P , компоненты которого в адаптированных координатах [6] выражаются с помощью равенств $P_{ad}^c = \partial_n \Gamma_{ad}^c$. Назовем тензорное поле P тензором Вагнера-Схоутена.

Пусть M – субриманово многообразие размерности n . Карту $k(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$; $i, j, k = 2n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [6]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $k(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D : $D = \text{span}(\vec{e}_a)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a} \vec{e}_b = \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c$. Из равенств $\vec{e}_a = A_a^{a'} \vec{e}_{a'}$, где $A_a^{a'} = \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обыч-

ным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности: $\Gamma_{ab}^c = A_a^{a'} A_b^{b'} A_c^c + A_c^{c'} \tilde{e}_a A_b^{c'}$.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем, соответственно, допустимые тензорные поля:

$$S(\vec{x}, \vec{y}) = \nabla_{\vec{x}} \vec{y} - \nabla_{\vec{y}} \vec{x} - P[\vec{x}, \vec{y}],$$

$$R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}} \nabla_{\vec{y}} \vec{z} - \nabla_{\vec{y}} \nabla_{\vec{x}} \vec{z} - \nabla_{P[\vec{x}, \vec{y}]} \vec{z} - P[Q[\vec{x}, \vec{y}], \vec{z}],$$

где $Q = I - P$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \Gamma(D)$. Тензор $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$ носит название тензора кривизны субриманова многообразия.

Тензорное поле $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = g((\nabla_{\vec{x}} \varphi)\vec{y}, \vec{z})$, где ∇ - связность Леви-Чивита, введено и названо в работе [1] фундаментальным тензорным полем, ассоциированным со структурой Би-метрического многообразия.

Векторные поля $(\tilde{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b x^{n+c} \partial_{n+b}, \partial_n, \partial_{n+a}) = (A_i)$ определяют [5] на распределении D субриманова многообразия как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^a + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma_{bc}^a x^{n+c} dx^b)$ - соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$[\tilde{e}_a, \tilde{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c},$$

$$[\tilde{e}_a, \partial_n] = x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c},$$

$$[\tilde{e}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c},$$

где R_{bad}^c - компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [5]: $R_{abc}^d = 2\tilde{e}_{[a} \Gamma_{b]c}^d + 2\Gamma_{[a|le|}^d \Gamma_{b]c}^e$.

Определим на многообразии D почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, \tilde{g}, J, \tilde{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая $J\tilde{x}^h = \tilde{x}^j, J\tilde{x}^v = -\tilde{x}^h$. $\tilde{g}(\tilde{x}^h, \tilde{y}^h) = -\tilde{g}(\tilde{x}^v, \tilde{y}^v) = g(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{g}(\tilde{x}^h, \tilde{y}^v) = \tilde{g}(\tilde{x}^h, \tilde{u}) = \tilde{g}(\tilde{x}^v, \tilde{u}) = 0$.

Имеют место следующие предложения.

Предложение 1 [9]. Структура $(\tilde{D}, J, \tilde{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, D)$ является почти контактной структурой с Би-метрикой.

Предложение 2 [9]. Пусть $\tilde{\nabla}$ - связность Леви-Чивита на Би-метрическом многообразии D , тогда ее ненулевые коэффициенты $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ в адаптированных координатах в случае нулевого тензора Вагнера-Схоутена получают следующее представление:

$$\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c,$$

$$2\tilde{\Gamma}_{ab}^{n+c} = R_{bad}^c x^{n+d},$$

$$2\tilde{\Gamma}_{ab}^n = 2\omega_{ba} - \partial_n g_{ab},$$

$$2\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^c = R_{bda}^c x^{n+d},$$

$$2\tilde{\Gamma}_{n+a,b}^c = R_{adb}^c x^{n+d},$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{a,n+b}^{n+c} &= \Gamma_{ab}^c, \\ 2\tilde{\Gamma}_{n+a,n+b}^n &= \partial_n g_{ab}, \\ 2\tilde{\Gamma}_{an}^c &= 2\tilde{\Gamma}_{na}^c = g^{cd}(2\omega_{ad} + \partial_n g_{ad}), \\ 2\tilde{\Gamma}_{an}^{n+c} &= \partial_n \Gamma_{ad}^c x^{n+d} = -2\tilde{\Gamma}_{na}^{n+c}, \\ 2\tilde{\Gamma}_{n+a,n}^{n+c} &= 2\tilde{\Gamma}_{n,n+a}^{n+c} = g^{cd} \partial_n g_{ad}.\end{aligned}$$

Пусть $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ – фундаментальное тензорное поле, ассоциированное с продолженной Би-метрической структурой. Проводя необходимые вычисления, основанные на использовании предложения 2, получаем следующие значения $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ для базисных векторов:

$$\begin{aligned}F(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c) &= F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}) = \frac{1}{2}(R_{baoc} - R_{obac}); \\ F(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_{n+c}) &= F(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \vec{\varepsilon}_b) = \frac{1}{2}R_{aobc}; \\ F(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b, \partial_n) &= F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \vec{\varepsilon}_b) = \frac{1}{2}\partial_n \Gamma_{ao}^e g_{eb}; \\ F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}, \partial_n) &= F(\vec{\varepsilon}_a, \partial_n, \partial_{n+b}) = C_{ab} + \omega_{ab}; \\ F(\partial_{n+a}, \vec{\varepsilon}_b, \partial_n) &= F(\partial_{n+a}, \partial_n, \vec{\varepsilon}_b) = C_{ab}; \\ F(\partial_{n+a}, \partial_{n+c}, \partial_n) &= F(\partial_{n+a}, \partial_n, \partial_{n+c}) = -\frac{1}{2}\partial_n \Gamma_{bo}^e g_{ea}; \\ F(\partial_n, \vec{\varepsilon}_b, \vec{\varepsilon}_c) &= F(\partial_n, \partial_{n+b}, \partial_{n+c}) = -\frac{1}{2}(\partial_n \Gamma_{co}^e g_{eb} + \partial_n \Gamma_{bo}^e g_{ec}); \\ F(\partial_n, \vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) &= F(\partial_n, \partial_{n+b}, \vec{\varepsilon}_a) = \omega_{ab}.\end{aligned}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $R_{aob}^e = R_{aab}^e x^{n+d}$, $\Gamma_{ao}^e = \Gamma_{ad}^e x^{n+d}$, $R_{badc} = R_{bad}^e g_{ec}$.

В зависимости от значений внутренних инвариантов выделим 12 классов субримановых многообразий как это показано в табл. 1.

Таблица 1. Классификация субримановых многообразий контактного типа

R	ω	C	P	Φ
0	0	0	0	Φ_0
1	0	0	0	Φ_1
0	1	0	0	Φ_2
1	1	0	0	Φ_3
0	0	1	0	Φ_4
1	0	1	0	Φ_5
1	1	1	0	Φ_6
1	0	1	1	Φ_7
1	1	1	1	Φ_8

В таблице 1 символы «0» и «1» обозначают обращение или, соответственно, не обращение в нуль соответствующего инварианта.

Значения фундаментального тензора продолженной структуры $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ зависят от класса исходного субриманова многообразия. Тем самым, каждому классу субримановых многообразий соответствует некоторый класс Би-метрических многообразий с продолженной структурой. Таким образом, в соответствии с предложенной нами классификацией многообразий с продолженной структурой получаем 12 классов $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{11}$ Би-метрических многообразий.

Пусть, теперь, M - субриманово многообразие с ненулевым тензором Вагнера-Схоутена. Как видно из таблицы 1, указанному случаю соответствуют два класса - Φ_7 и Φ_8 .

Используя выписанные выше значения фундаментального поля $F(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, получаем следующую теорему.

Теорема. Пусть M - субриманово многообразие с ненулевым тензором Вагнера-Схоутена, относящееся к классу Φ_8 . Тогда соответствующая продолженная Би-метрическая структура принадлежит классу $F_1 \oplus \dots \oplus F_{10}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ganchev G.* Almost contact manifolds with B-metric / G. Ganchev, V. Mihova, K. Gribachev // Math. Balk. N.S. 1993. 7(3-4). P. 261–276.
2. *Bukusheva A.V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution / A.V. Bukusheva, S.V. Galaev // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), no 2. P. 13-22.
3. *Букушева А.В.* О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Математика. Механика. 2013. №.15. С. 8-11.
4. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с связностью // Научные ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Математика. Физика. 2015. №17(214), вып. 40. С. 20-24.
5. *Букушева А.В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Изв. вузов. Математика. 2013. №4. С. 10-18.
6. *Букушева А.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой / А.В. Букушева, С.В. Галаев // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №. 3. С. 17-22.
7. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, вып. 3. С. 263-272.
8. *Галаев С.В.* Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 2. С. 138-147.
9. *Галаев С.В.* О классификации продолженных Би-метрических структур на субримановых многообразиях с нулевым тензором кривизны Схоутена / С.В. Галаев // Вестник Башкир. ун-та. 2017. Т. 22, №4. С. 936-939.

УДК 532.5

В. А. Коромыслов^{1,2}, А. А. Ширяев¹

¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Россия, г. Ярославль, e-mail: aashiryayev@list.ru

²Ярославский филиал ПГУПС
Россия, г. Ярославль, e-mail: smyslov2007@gmail.ru

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА-ГЕЛЬМГОЛЬЦА, РЕАЛИЗУЮЩЕЙСЯ В РАЗЛИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

Рассмотрена неустойчивость типа Кельвина-Гельмгольца связанная с движением внешней среды относительно объектов с различной геометрией: плоскости, цилиндра и сферы.

Ключевые слова: жидкость, поверхность раздела, электрический заряд, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца

V.A. Koromyslov^{1,2}, A. A. Shiryaev¹

¹P.G. Demidov Yaroslavl State University
Russia, Yaroslavl, e-mail: aashiryayev@list.ru

²Yaroslavl Branch of PGUPS
Russia, Yaroslavl, e-mail: smyslov2007@gmail.ru

ABOUT CALVIN-HELMHOLTZ'S INSTABILITY, IMPLEMENTED IN VARIOUS GEOMETRIYA

The instability like Calvin-Helmholtz connected with the movement of the external environment concerning objects with various geometry is considered: planes, cylinder and sphere.

Keywords: liquid, interface, electric charge, Calvin-Helmholtz's instability

В разнообразных задачах технической физики, геофизики и технологии приходится сталкиваться с движением одной среды относительно другой. Данное явление вызывает неизменный интерес, поскольку в реальности случаи, когда внешняя среда отсутствует, достаточно редки. При определенных условиях граница раздела двух сред становится неустойчивой. Неустойчивость может быть вызвана комбинацией различных факторов: наличием электрического и (или) гравитационного поля, наличием заряда на поверхности раздела, равномерным или неравномерным относительным движением сред, каким либо периодическим внешним воздействием и т.д.

Рассмотрим простейший случай, когда среды не смешиваются и одна среда движется с постоянной скоростью относительно другой. При этом

на границе раздела наблюдается тангенциальный скачек поля скоростей. Возникающую неустойчивость принято называть неустойчивостью Кельвина-Гельмгольца. Большинство задач рассматривают три основные геометрически заданные поверхности раздела.

1) **Плоскость.** В качестве сред выступают два полубесконечных пространства разделенных плоскостью, либо одна из сред задана слоем конечной толщины. Как правило, в таких задачах речь идет о поведении жидкости в поле силы тяжести. В качестве одного из параметров выступает отношение плотностей верхней и нижней сред. В зависимости от условий задачи отношение плотностей могут меняться в широких пределах: от значений много меньше единицы, когда одна из сред является газом, до значений близких и даже больше единицы. В последнем случае существенную роль в развитии неустойчивости уже будет играть неустойчивость Рэлея-Тейлора.

2) **Цилиндр.** Для расчетов, обычно принимают, что цилиндр бесконечный. В таких задачах речь идет об эволюции струи и практически во всех случаях предполагается, что плотность струи много больше плотности среды, что закономерно, поскольку, как правило, речь идет о распаде струи в газовой среде или воздухе.

3) **Сфера.** Как и в случае с плоской поверхностью отношение плотностей могут меняться в широких пределах. При значениях отношения много больше единицы, когда одна из сред является газом, рассматривается либо эволюция пузыря в жидкой среде, либо капли в газовой среде. Отношение плотностей может быть близко к единице. В этом случае моделируется поведение жидкостей типа эмульсий. В большинстве задач рассматривается первый вариант. Модель, когда капля движется с эмульсии, довольно экзотическая, и движение можно объяснить, пожалуй, только наличием заряда и внешнего электрического поля.

Рассмотрим и сравним механизмы реализации неустойчивости для трех описанных выше геометрий. При решении задач дополнительно будем учитывать влияние внешнего однородного электростатического поля или заряда на поверхности раздела. Это необходимо для того чтобы сравнить механизм реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца с хорошо изученной неустойчивостью жидкости в электрическом поле (см, например, [1, 2]).

Для того чтобы оценить критические значения и тип неустойчивости, достаточно ограничиться линейным приближением при решении задач и получить дисперсионное уравнение, связывающее частоту осцилляций поверхности с другими параметрами задачи.

1. Плоская поверхность

Задача расчета частот колебаний и критических значений неустойчивости плоской поверхности раздела двух движущихся относительно друг друга сред решалась не раз, как в линейном [3] так и нелинейном [2,4] приближении.

Рассмотрим две несмешивающиеся идеальные несжимаемые жидкости, верхняя из которых диэлектрическая с постоянной ε^* имеет плотность ρ_1 и заполняет в поле сил тяжести \mathbf{g} полубесконечное пространство $z > 0$ ($\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$, \mathbf{n}_z - орт декартовой оси), а нижняя - идеально проводящая плотности ρ_2 заполняет полупространство $z \leq 0$. Плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной границей раздела сред, характеризуемой коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что в верхней среде имеется электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0 \equiv E_0 \mathbf{n}_z$; это приводит к наличию на невозмущенной капиллярным волновым движением границе раздела сред электрического заряда, распределенного с постоянной плотностью $\kappa \equiv \varepsilon^* E_0 / 4\pi$. Пусть верхняя среда движется параллельно границе раздела с постоянной скоростью \mathbf{u}_0 вдоль орта \mathbf{n}_x , и, кроме того, в начальный момент времени задана виртуальная волновая деформация границы раздела сред, т.е. начальные условия имеют вид

$$u = u_0, \quad \xi(x, t) = \zeta \cdot \cos kx, \quad \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = 0 \quad (t = 0),$$

где k - волновое число; ζ - амплитуда волны; $\xi(x, t)$ - функция, описывающая малое отклонение границы раздела сред от равновесного в поле силы тяжести состояния.

Проанализируем устойчивость капиллярно-гравитационных волн в описанной системе, полагая, что волновые течения жидкостей в верхней и нижней средах являются потенциальными с потенциалами $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$ соответственно. Принимая, что скорости гидродинамических движений жидкости много меньше скорости распространения электромагнитного сигнала в диэлектрической среде, электрическое поле в верхней среде будем считать электростатическим и описывать с помощью потенциала $\Psi(\mathbf{r}, t)$. В итоге математическая формулировка задачи о расчете волнового движения в двухслойной системе несмешивающихся жидкостей при наличии на границе раздела равномерно распределенного электрического заряда и тангенциального скачка поля скоростей запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_j(\mathbf{r}, t) &= 0, \quad j = 1, 2, \quad \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \\ \nabla \Phi_1(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \mathbf{u}_0, \quad -\nabla \Psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}_0 \quad (z \rightarrow \infty), \\ \nabla \Phi_2(\mathbf{r}, t) &\rightarrow 0 \quad (z \rightarrow -\infty), \\ (\partial F / \partial t) &= 0, \quad F(x, z, t) \equiv z - \xi(x, t) = 0, \\ U_z^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= U_z^{(2)}(\mathbf{r}, t), \quad \Psi = \Psi_s, \\ -P_1(\mathbf{r}, t) + P_2(\mathbf{r}, t) + P_e(\xi) - P_\sigma(\xi) &= 0 \quad (z = \xi(x, t)). \end{aligned}$$

Здесь P_1 и P_2 – гидродинамические давления в первой и второй средах; P_e и P_σ – давления на границу раздела электрических сил и сил поверхностного натяжения; $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Psi(\mathbf{r}, t)$ – напряженность электрического поля в верхней среде; $\Psi_s(t)$ – электростатический потенциал, постоянный в каждый момент времени вдоль границы раздела сред.

Решение задачи стандартными методами [4] в безразмерных переменных ($\rho_2 = \sigma = g = 1$) при малом параметре $\varepsilon \equiv \zeta$ позволяет получить решение для функций $\xi(x, t)$, $\Psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_2(\mathbf{r}, t)$. Дисперсионное уравнение, связывающее частоты осцилляций поверхности ω с волновым числом k и другими параметрами задачи, имеет вид

$$\omega^2 - \frac{2\rho u_0 k}{(1+\rho)}\omega + \frac{1}{(1+\rho)} \left[\rho u_0^2 k^2 + \frac{\varepsilon_* E_0^2 k^2}{4\pi} - (1+\rho)k - k^3 \right] = 0. \quad (1)$$

Решения (1) определяют частоты волн ω

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\rho We}{(1+\rho)}} k \pm \sqrt{\frac{1}{(1+\rho)} [(1-\rho)k + k^3 - (We + W)k^2]}, \quad (2)$$

$$W \equiv \frac{\varepsilon_* E_0^2}{4\pi}; \quad We \equiv \frac{\rho u_0^2}{1+\rho}.$$

Несложно видеть, что из-за различия знаков перед радикалом две волны, определяемые выражением (2), имеют различные фазовые скорости. Волновое движение устойчиво, когда частоты вещественны, т.е. подкоренное выражение больше нуля. При увеличении параметров W и We выражение под радикалом будет уменьшаться, а с ним уменьшается и разность частот, определяемых (2), и когда оно обратится в ноль, частоты волн сравняются. Если же при дальнейшем изменении физических параметров системы выражение под радикалом в (2) станет отрицательным, то частота станет комплексной: $\omega \equiv \text{Re } \omega \pm i \text{Im } \omega$. Амплитуды волн, получаемых при суперпозиции $\exp[i(kx - \omega t)]$ и $\exp[-i(kx - \omega t)]$, убывают или возрастают по закону $\sim \exp[mt \cdot |\text{Im } \omega|]$, соответственно.

Таким образом, условие устойчивости волн на границе раздела имеет вид

$$(W + We) < k + (1 - \rho)/k.$$

В подкоренное выражение параметры We и W входят аддитивно и любой из них можно принять равным нулю. Следовательно, получаем условия реализации неустойчивости типа Тонкса-Френкеля при $We=0$ и $W \neq 0$ или реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в чистом виде при $W = 0$ $We \neq 0$.

Из (2) несложно заметить, что феноменологии неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Тонкса-Френкеля совершенно различны. При отличной от нуля скорости внешней среды вне зависимости от других параметров всегда будет существовать положительная составляющая частоты

$$\omega' = \sqrt{\frac{\rho We}{1 + \rho}} k, \quad (3)$$

которая будет давать либо аддитивный вклад в частоту при до критических значениях We и W (при положительном значении подкоренного выражения у радикала), либо определять частоту при за критических значениях We и W (при отрицательном значении подкоренного выражения у второго корня). Таким образом, неустойчивость Кельвина-Гельмгольца является периодической – волна продолжает двигаться, экспоненциально во времени увеличивая свою амплитуду (точки на поверхности жидкости совершают периодические движения).

При нулевой скорости внешней среды $\omega' = 0$, т.е. неустойчивость Тонкса-Френкеля является аperiodической: амплитуда волны экспоненциально увеличивается со временем (точки на поверхности жидкости совершают аperiodические движения).

К вышесказанному можно добавить, что при $\rho > 1$ даже при нулевых значениях We и W будет наблюдаться неустойчивость - неустойчивость Рэлея-Тейлора: более тяжелая верхняя жидкость протекает в легкую.

Наиболее интересный результат проведенного анализа состоит в том, что инкременты всех трёх неустойчивостей (Кельвина-Гельмгольца, Тонкса-Френкеля и Рэлея-Тейлора) описываются одним и тем же аналитическим выражением – радикалом в (2). При этом также вне зависимости от типа реализации неустойчивости наличие движения внешней среды будет приводить к тому, что развитие неустойчивости будет сопровождаться колебательным процессом.

2. Цилиндрическая поверхность (струя)

Вопрос о влиянии скорости движения внешней среды на распад струи изучен гораздо хуже, чем для случаев плоской и сферической поверхности раздела. В основном в задачах в качестве внешней среды рассматривается вакуум, хотя в реальных условиях внешняя среда присутствует практически всегда (например, воздух). Логично предположить, что и для струи должно реализовываться неустойчивость, аналогичная неустойчивости Кельвина-Гельмгольца.

Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости капиллярных волн на однородно заряженной с поверхностной плотностью заряда χ цилиндрической поверхности идеально проводящей несжимаемой струи идеальной жидкости радиуса R , с коэффициентом межфазного натяжения σ и

плотностью ρ_2 , движущейся со скоростью $\mathbf{U}_0 \parallel \mathbf{e}_z$, где \mathbf{e}_z - орт продольной координаты, в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющей плотность ρ_1 и диэлектрическую проницаемость равную единице. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии струи и движущейся со струей со скоростью \mathbf{U}_0 , в цилиндрических координатах, орт \mathbf{e}_z которой совпадает по направлению с \mathbf{U}_0 и с осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_2 = \sigma = 1$, а поверхность раздела сред, возмущенная капиллярным волновым движением, описывается соотношением:

$$F(r, z, \varphi, t) \equiv r - 1 - \xi(z, \varphi, t) = 0, \quad |\xi| = 1,$$

где $\xi(z, \varphi, t)$ - малое возмущение цилиндрической поверхности струи; φ - азимутальный угол. В целом математическая формулировка отличается от задачи, сформулированной в первой части только граничными условиями и цилиндрической системой координат. Решение задачи подробно изложено в [5], поэтому перейдем сразу к анализу дисперсионного уравнения, которое имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} s^2 - \frac{2\delta_m}{\beta_m} s - \frac{\kappa_m}{\beta_m} &= 0; \\ \kappa_m(k, \chi, U_0) &\equiv \left\{ \left[1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m) \right] - We \cdot k^2 h_m^{-1} \right\}; \\ \delta_m(k, U_0) &\equiv k \rho U_0 h_m^{-1}; \quad \beta_m(k) \equiv \frac{\rho g_m - h_m}{g_m h_m}; \\ h_m(k) &\equiv m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}; \quad g_m(k) \equiv m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)}; \\ w &\equiv 4\pi\chi^2; \quad We \equiv \rho U_0^2. \end{aligned}$$

где S - частота капиллярных волн; $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ - модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, порядка m [6], m - азимутальный параметр.

Решения дисперсионного уравнения имеют вид

$$s_{1,2} = \frac{\delta_m}{\beta_m} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_m}{\beta_m}\right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m}}; \quad \text{или} \quad s_{1,2} = \frac{g_m}{(\rho g_m - h_m)} k \rho U_0 \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{g_m k \rho U_0}{(\rho g_m - h_m)} \right]^2 + \frac{\left[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) h_m g_m - We \cdot k^2 g_m \right]}{(\rho g_m - h_m)}}. \quad (4)$$

Несложно заметить, что решение (4) аналогично решению (2), т.е. как и в случае плоской поверхности, при движении внешней среды неустойчивость струи будет сопровождаться осцилляциями поверхности.

Приравняв в (4) подкоренное выражение нулю, получим критическое условие перехода от устойчивых волн к неустойчивым:

$$\rho k^2 We + \left[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) \frac{h_m}{g_m} - k^2 We \cdot \frac{1}{g_m} \right] (\rho g_m - h_m) = 0.$$

Отсюда легко найти критическое для начала реализации неустойчивости значение параметра We , пропорционального квадрату скорости:

$$We = \frac{\left[-1 + m^2 + k^2 + w(1 + h_m) \right] (\rho g_m - h_m)}{k^2}. \quad (5)$$

Здесь следует отметить, что безразмерный параметр We , будучи выражен через размерные переменные, имеет вид $We \equiv (\rho_1 R U_0^2 / \sigma)$, и согласно экспериментальным данным [7] в газообразной среде его величина ограничена сверху значением: $We : 1$.

Из (5) несложно видеть, что с увеличением χ - поверхностной плотности электрического заряда на границе раздела сред (параметра W), критическая для начала распада струи величина скорости стационарного движения U_0 (параметра We) снижается, и при

$$w = (1 - m^2 - k^2) / (h_m + 1) \quad (6)$$

обращается в ноль. При значении параметра w , определяемом соотношением (6), реализуется электростатически-капиллярная неустойчивость волны с азимутальным числом m [7].

Таким образом, наличие движущейся параллельно струе среды приводит к возникновению колебательной неустойчивости. Как и в случае плоской поверхности раздела, неустойчивость может реализовываться за счет разных внешних полей (электростатического или гидродинамического), но развитие неустойчивости (рост амплитуды возмущения) во всех случаях при движении внешней среды будет сопровождаться осцилляциями поверхности струи.

3. Сферическая поверхность (капля в среде)

Задачи о движении капли в среде и о движении пузыря в жидкости также рассматривались не раз (см. например, [8-10]). Если пренебречь

радиальными колебаниями пузыря, то с точки зрения математики эти задачи эквивалентны. Расхождения в результатах возникает на этапе расчетов, поскольку разница в отношении плотностей составляет несколько порядков.

Пусть идеальная несжимаемая диэлектрическая среда с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_* , занимающая бесконечный объем, движется с постоянной скоростью \mathbf{U}_0 относительно неподвижной идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкой капли радиуса R , находящейся в однородном электростатическом поле \mathbf{E}_0 , направленному коллинеарно вектору \mathbf{U}_0 : $\mathbf{U}_0 \parallel \mathbf{E}_0$. Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ . Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма капли претерпела виртуальное осесимметричное возмущение конечной амплитуды, существенно меньшей радиуса капли, пропорциональное одной из мод капиллярных осцилляций системы и станем исследовать нелинейные осцилляции капли при $t > 0$.

Для упрощения нижеследующих расчетов будем пользоваться безразмерными переменными, в которых $R = \sigma = \rho_1 = 1$, при этом $\rho_2/\rho_1 \equiv \rho$. Тогда в сферической системе координат с началом в центре масс капли уравнение границы раздела сред, возмущенной осесимметричным капиллярным волновым движением, будет иметь вид

$$r = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1.$$

Математическая формулировка, как и ранее, отличается от представленной в первой части только граничными условиями и сферической системой координат.

При решении представленной задачи [9], так же как и ранее, использовался метод многих масштабов. Дисперсионное уравнение для n -й моды колебаний капли имеет вид

$$\omega_n^2 = \chi(n) \left(n(n-1)(n+2) - W \frac{n^2(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} - We \frac{2n^2((2n+1)(n^2-1)+3)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right); \quad (8)$$

$$\chi(n) = \left(1 + \rho \frac{n}{n+1} \right)^{-1}; \quad W = \frac{9E_0^2 \varepsilon_*}{4\pi}; \quad We = \frac{9}{4} U^2 \rho.$$

В отличие от выражения (2) для плоскости или (4) для струи, в данном случае частота осцилляций капли не содержит слагаемого типа (3) которое при любых значениях внешних параметров остается положительным. Т.е. для капли реализация неустойчивости не будет сопровождаться колебательным процессом, развитие неустойчивости будет аperiодическим.

Очевидно, такая разница возникает из-за различных типов дисперсионного уравнения. В случае плоской и цилиндрической поверхности раздела дисперсионное уравнение имеет вид

$$s^2 - bx + c = 0.$$

В корнях данного квадратного уравнения всегда присутствует действительная компонента $-b/4$, которая и определяет частоту колебаний при развитии неустойчивости, которая в свою очередь возникает при отрицательном дискриминанте данного уравнения. Для капли дисперсионное уравнение имеет вид

$$s^2 + c = 0.$$

Очевидно, в зависимости от знака c будут наблюдаться либо периодические осцилляции, либо аperiodический рост амплитуды колебаний. Объяснить с физической точки зрения, почему в первых двух случаях неустойчивость периодическая, а в третьем аperiodическая довольно проблематично. Возможно, это связано именно с геометрией рассматриваемой задачи. И в случае плоскости, и в случае струи мы имеем дело с потоком над бесконечной протяженной поверхностью. В третьем случае поверхность ограничена. Аналогом волн на поверхности струи были бы тороидальные волны на поверхности капли, распространяющиеся вдоль потока от одного полюса к другому, но при потенциальном течении такие волны невозможно смоделировать. Можно попытаться рассмотреть задачу об обдувании струи слабым потоком газа в направлении перпендикулярном оси струи. Данная задача будет промежуточной между этими двумя случаями, с одной стороны – бесконечная струя, с другой взаимодействии с поверхностью, ограниченной диаметром струи.

Таким образом, реализация неустойчивости по отношению к тангенциальному скачку поля скоростей (неустойчивости Кельвина-Гельмгольца) существенно отличается для объектов с различной геометрией. Отмечено, что в случае плоской и цилиндрической поверхности раздела двух сред неустойчивость носит колебательный характер, т.е. рост амплитуды сопровождается распространением волны. В случае капли неустойчивость носит аperiodический характер, т.е. рост амплитуды возмущения n -й моды не сопровождается колебаниями соответствующими данной моды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коромыслов В.А.* Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли в диэлектрической среде при одномодовой начальной деформации формы / В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев // Журн. техн. физики. 2003. Т.73, вып. 9. С.44-51.

2. Григорьев А.И. Нелинейные поправки к критическим условиям реализации неустойчивости заряженной границы раздела двух жидких сред / А.И. Григорьев, Д.М. Пожарицкий, С.О. Ширяева // Журн. техн. физики. 2009. Т.79, вып. 1. С.45-50.
3. Григорьев А.И. Неустойчивость заряженной плоской границы раздела сред по отношению к тангенциальному разрыву на ней зависящего от времени поля скоростей // Журн. техн. физики. 2001. Т.70, вып.1. С.24-26.
4. Григорьев А.И. Об устойчивости волнового движения на заряженной границе раздела несмешивающихся жидкостей при наличии тангенциального скачка поля скоростей / А.И. Григорьев, С.А. Суханов, С.О. Ширяева // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. №4. С.99-109.
5. Григорьев А.И. Об устойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной струи, движущейся относительно среды / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Н.А. Петрушов // Журн. техн. физики. 2011. Т.81, вып. 2. С.16-22.
6. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. Ширяева С.О. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов: Препринт ИМ РАН №25 / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, А.А. Святченко. Ярославль. 1993. 118 с.
8. Коромыслов В.А. Нелинейные осцилляции капли, движущейся с постоянной скоростью относительно диэлектрической среды в электростатическом поле / В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев // Журн. техн. физики. 2006. Т.76, вып.5. С.16-24.
9. Коромыслов В.А. Нелинейные осцилляции заряженных капель во внешних силовых полях: монография / В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев. М.: Изд-во РГОТУПС, 2007. 186 с.
10. Ширяева С.О. О расчете амплитуды трансляционной моды при нелинейных осцилляциях капли во внешней среде / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, А.Н. Жаров // Журн. техн. физики. 2003. Т.73, вып. 9. С. 60-63.

УДК 512.7:514.14

Л. Б. Медведева¹, Л. А. Сидорова²

¹Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: lbmedvedeva@yandex.ru

²Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: sidorovala@ystu.ru

МНОГООБРАЗИЕ БИСЕКАНТ НОРМАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ РАЗМЕРНОСТИ p И ПОРЯДКА $n-p+1$

Указан конструктивный способ построения нормального рационального многообразия размерности p порядка $n-p+1$ в n -мерном проективном пространстве P^n . Исследовано многообразие одномерных бисекант этого многообразия.

Ключевые слова: многообразие, грассманиан, подмногообразие на грассманиане, цикл Шуберта, элементарные числовые характеристики.

L. B. Medvedeva¹, L. A. Sidorova²

¹Yaroslavl Higher Military School of Air Defense
Russia, Yaroslavl, e-mail: lbmedvedeva@yandex.ru

²Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: sidorovala@ystu.ru

THE BISECANT VARIETY FOR NORMAL VARIETIES OF DIMENSION p AND ORDER $n-p+1$

We give a constructive method for constructing a rational normal variety of $n-p+1$ order p dimension in p -dimensional projective space is indicated. The manifold of one-dimensional bisectants of this variety is studied.

Keywords: variety, Grassmannian, subvariety on Grassmannian, Schubert cycle, elementary numerical characteristics.

Данная работа представляет собой обобщение результатов статей [1] и [2] на случай рационального многообразия V_p^{n-p+1} в n -мерном проективном пространстве P^n , имеющего размерность p ($1 < p < n/2$) и порядок $n-p+1$: указан конструктивный способ построения многообразия и исследовано множество его одномерных бисекант.

Определение нормального многообразия $V_p^{n-p+1} \subset P^n$

Пусть в P^n фиксированы две связки $C(P_1^{p-1})$ и $C(P_2^{p-1})$ p -мерных плоскостей ($p < n/2$) с $(p-1)$ -мерными вершинами P_1^{p-1} , P_2^{p-1} и установлено проективное отображение $f: C(P_1^{p-1}) \rightarrow C(P_2^{p-1})$. Соответственные при этом отображении p -плоскости, пересекаясь, образуют некоторое многообразие V . Чтобы найти размерность и порядок этого многообразия, рассмотрим $(n-p)$ -плоскость P^{n-p} , не имеющую с вершинами связок общих точек. Отображение $f: C(P_1^{p-1}) \rightarrow C(P_2^{p-1})$ индуцирует в P^{n-p} проективное преобразование \tilde{f} : соответственными в \tilde{f} являются точки пересечения с P^{n-p} соответственных p -плоскостей связок. Число неподвижных точек проективного преобразования пространства P^{n-p} в общем случае равно $n-p+1$. Эти точки и являются общими точками искомого многообразия V и $(n-p)$ -плоскости. Так как V пересекается с P^{n-p} в конечном числе точек, то $\dim V = p$, а число точек пересечения равно степени V : $\deg V = n-p+1$. Отсюда обозначение $V = V_p^{n-p+1}$.

Далее будем рассматривать множество прямых пространства P^n , пересекающих многообразие $V_p^{n-p+1} \subset P^n$ в двух точках, – множество од-
номерных бисекант многообразия V_p^{n-p+1} .

Исследование семейства одномерных бисекант многообразия V_p^{n-p+1}

Как и в предыдущих работах, обозначим семейство бисекант много-
образия V_p^{n-p+1} и образ этого семейства прямых на грассманиане
 $G(2, n+1)$ символом K . Так как $\dim G(2, n+1) = 2n-2$, а $\dim K = 2p$, то
 $\text{codim } K = 2(n-p-1)$.

Известно, что полная характеристика свойств любого многообразия
прямых пространства P^n дается его элементарными числовыми характе-
ристиками.

Согласно теореме о базисе [3, с. 219], образ на грассманиане
 $G(2, n+1)$ любого семейства прямых n -мерного проективного простран-
ства P^n можно представить в виде линейной комбинации циклов $\sigma_{a_1 a_2}$
Шуберта, коразмерность которых равна коразмерности семейства прямых.
В нашем случае

$$K = \sum (K \cdot \sigma_{n-1-a_2, n-1-a_1}) \cdot \sigma_{a_1 a_2}, \quad (1)$$

где

$$0 \leq a_2 \leq a_1 \leq n-1, \quad a_1 + a_2 = 2(n-p-1). \quad (2)$$

Коэффициенты при циклах Шуберта в этом разложении являются
элементарными числовыми характеристиками многообразия K [3], кото-
рые и предстоит определить.

Для начала выпишем все возможные циклы $\sigma_{a_1 a_2}$ Шуберта, удовле-
творяющие условиям (2):

$$\sigma_{n-1, n-2p-1}, \sigma_{n-2, n-2p}, \sigma_{n-3, n-2p+1}, \dots, \sigma_{n-p, n-p-2}, \sigma_{n-p-1, n-p-1}.$$

Таким образом, семейство K прямых представляется на грассма-
ниане $G(2, n+1)$ в виде линейной комбинации указанных циклов Шубер-
та. Поскольку этих циклов насчитывается $p+1$ штук, то столько же будет
и элементарных числовых характеристик для K . Итак,

$$K = (K \cdot \sigma_{2p, 0}) \cdot \sigma_{n-1, n-2p-1} + (K \cdot \sigma_{2p-1, 1}) \cdot \sigma_{n-2, n-2p} + \dots + \\ + (K \cdot \sigma_{p+1, p-1}) \cdot \sigma_{n-p, n-p-2} + (K \cdot \sigma_{p, p}) \cdot \sigma_{n-p-1, n-p-1},$$

или коротко

$$K = \sum_{i=0}^p (K \cdot \sigma_{2p-i, i}) \cdot \sigma_{n-(i+1), n-2p+i-1}.$$

Выясним геометрический смысл элементарных характеристик $\delta_{2p-i,i} = K \cdot \sigma_{2p-i,i}$, $i = 0, 1, \dots, p$. Для этого, как и ранее, перейдем от терминологии книги [3] к терминологии книги [4].

В книге [4] грассманиан $G(2, n+1)$ рассматривается как множество прямых в проективном пространстве P^n и обозначается символом $\Omega(1, n)$. Понятию цикла Шуберта $\sigma_{a_1, a_2} \subset G(2, n+1)$, $0 \leq a_2 \leq a_1 \leq n-1$, $a_1 + a_2 = 2(n-p-1)$ соответствует понятие шубертова многообразия, обозначаемого символом Ω_{b_0, b_1} , где $0 < b_0 < b_1 \leq n$. Зависимость между символами a_j и b_{j-1} ($j=1, 2$) определяется формулой

$$b_{j-1} = n - 1 + j - a_j - 1 = n + j - a_j - 2.$$

В результате получим $\delta_{2p-i,i} = K \cdot \sigma_{2p-i,i} = K \cdot \Omega_{n-2p+i-1, n-i}$, где $i = 0, 1, 2, \dots, p$, а число $\delta_{2p-i,i}$ равно числу прямых из множества K , лежащих в произвольно выбранном подпространстве $P^{n-i} \subseteq P^n$ и пересекающих в нем подпространство $P^{n-2p+i-1} \subset P^{n-i}$. В частности:

- 1) $\delta_{2p,0} = K \cdot \sigma_{2p,0} = K \cdot \Omega_{n-2p-1, n}$ – число прямых из K , пересекающих подпространство $P^{n-2p-1} \subset P^n$ размерности $n-2p-1$ в точке;
- 2) $\delta_{2p-1,1} = K \cdot \sigma_{2p-1,1} = K \cdot \Omega_{n-2p, n-1}$ – число прямых из K , лежащих в гиперплоскости $P^{n-1} \subset P^n$ и пересекающих в ней подпространство $P^{n-2p} \subset P^{n-1}$;
- 3) $\delta_{p,p} = K \cdot \sigma_{p,p} = K \cdot \Omega_{n-p-1, n-p}$ – число прямых из K , лежащих в подпространстве $P^{n-p} \subset P^n$.

Для определения значений элементарных числовых характеристик применим, как и ранее, принцип специализации. Согласно этому принципу многообразие V_p^{n-p+1} рассматривается как объединение $n-p+1$ плоскостей P^p размерности p , каждая из которых, начиная со второй, пересекает предыдущую по плоскости P^{p-1} размерности $p-1$, так что линейная оболочка всех p -плоскостей совпадает с P^n . В этом случае множество K бисекант многообразия V_p^{n-p+1} преобразуется в свою специализацию \tilde{K} , состоящую из прямых, пересекающих каждые две p -мерные плоскости из множества плоскостей, которые заменили многообразие V_p^{n-p+1} . Поэтому \tilde{K} распадается на компоненты, определяемые парами p -плоскостей. Все компоненты можно разбить на группы: в одну группу входят компоненты, определяемые одинаковым расположением p -плоскостей в паре. Поэтому компоненты, составляющие группу, не отличаются элементарными числовыми характеристиками.

Рассмотрим эти группы.

1) Первая группа содержит $n - p$ компонент, каждая из которых определяется парой p -плоскостей, пересекающихся по P^{p-1} : $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, ..., $(n - p, n - p + 1)$, и состоит из прямых, лежащих в их линейной оболочке – пространстве P^{p+1} . Компонента K_1 , представляющая эту группу, является подмногообразием грассманиана $G(2, p + 2)$, которое описывается следующим символом: $K_1 = \Omega_{p,p+1} = \sigma_{00}$.

2) Компоненты второй группы определяются парами p -плоскостей, пересекающихся по P^{p-2} : $(1,3)$, $(2,4)$, ..., $(n - p - 1, n - p + 1)$. Линейная оболочка этих p -плоскостей совпадает с P^{p+2} . Таких компонент будет $n - p - 1$. Компонента K_2 , представляющая эту группу, является подмногообразием грассманиана $G(2, p + 3)$ и представляется следующим образом: $K_2 = \Omega_{p,p+2}^2 = \sigma_{10}^2$.

Рассмотрим i -ю группу ($3 \leq i \leq p$). Компоненты этой группы определяются парой p -плоскостей, пересекающихся по P^{p-i} : $(1, i + 1)$, $(2, i + 2)$, ..., $(n - p - i + 1, n - p + 1)$. Линейная оболочка этих p -плоскостей совпадает с P^{p+i} . Таких компонент всего $n - p - i + 1$. Компонента K_i , представляющая эту группу, является подмногообразием грассманиана $G(2, p + i + 1)$ и представляется в теории шубертовых многообразий символами: $K_i = \Omega_{p,p+i}^2 = \sigma_{i-1,0}^2$.

Последняя группа – $(p + 1)$ -ная. Ее компоненты порождены двумя непересекающимися p -плоскостями. Их линейная оболочка совпадает с P^{2p+1} . Количество элементов в этой группе также несложно найти. Выпишем символы, представляющие элементы $(p + 1)$ -ной группы, в определенном порядке:

$(1, p + 2)$
 $(1, p + 3) \quad (2, p + 3)$
 $(1, p + 4) \quad (2, p + 4) \quad (3, p + 4)$

 $(1, n - p) \quad (2, n - p) \quad (3, n - p) \quad \dots \quad (n - 2p - 1, n - p)$
 $(1, n - p + 1) \quad (2, n - p + 1) \quad (3, n - p + 1) \dots (n - 2p - 1, n - p + 1) \quad (n - 2p, n - p + 1)$.

В первом столбце записано $n - 2p$ символов, во втором – $(n - 2p - 1)$ и так далее, в последнем – 1 символ. Количество H элементов в группе равно

$$H = 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 2p - 2) + (n - 2p - 1) + (n - 2p),$$

то есть

$$H = \frac{1 + n - 2p}{2} \cdot (n - 2p) = \frac{(n - 2p) \cdot (1 + n - 2p)}{2}$$

Итак, в последней $(p + 1)$ -ной группе число компонент равно

$$\frac{(n - 2p) \cdot (1 + n - 2p)}{2}.$$

Компонента K_{p+1} , представляющая эту группу, является подмногообразием грассманиана $G(2, 2p + 2)$ и в символах теории Шуберта представляется следующим образом: $K_{p+1} = \Omega_{p, 2p+1}^2 = \sigma_{p0}^2$.

Мы рассмотрели все возможные группы. Их $p + 1$ штук. Для вычисления элементарных числовых характеристик многообразий K_i ($i = \overline{1, p + 1}$), представляющих i -тые группы, каждое из них нужно записать в виде линейной комбинации циклов Шуберта, коразмерность которых равна размерности K_i . Поскольку каждое многообразие K_i является пересечением шубертовых многообразий, то для отыскания искомой линейной комбинации используется теория пересечений циклов Шуберта.

1. $K_1 \subset G(2, p + 2)$, $\dim K_1 = 2p$, $\dim G(2, p + 2) = 2p$. Отсюда $\text{codim} K_1 = 0$.

Значит, K_1 можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта, коразмерность которых равна нулю:

$$K_1 = (K_1 \cdot \sigma_{pp}) \cdot \sigma_{00} = \delta_{pp} \cdot \sigma_{00}.$$

Так как компонента K_1 представляется символом $K_1 = \Omega_{p, p+1} = \sigma_{00}$ (см. выше), то, сравнивая это представление с разложением по базису, замечаем, что K_1 имеет следующие элементарные числовые характеристики:

$$\delta_{pp} = 1, \quad \delta_{p+1, p-1} = 0, \dots, \delta_{2p, 0} = 0.$$

2. $K_2 \subset G(2, p + 3)$, $\dim K_2 = 2p$, $\dim G(2, p + 3) = 2(p + 1)$. Отсюда $\text{codim} K_2 = 2$.

Значит, K_2 можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта, коразмерность которых равна 2:

$$K_2 = (K_2 \cdot \sigma_{p+1, p-1}) \cdot \sigma_{20} + (K_2 \cdot \sigma_{pp}) \cdot \sigma_{11} = \delta_{p+1, p-1} \cdot \sigma_{20} + \delta_{pp} \cdot \sigma_{11}.$$

Вспомним, что $K_2 = \Omega_{p, p+2}^2 = \sigma_{10}^2$. Для вычисления пересечения двух циклов Шуберта, хотя бы один из которых является специальным циклом вида $\sigma_{a, 0, 0, \dots, 0}$, применим формулу Пиери [3]:

$$(\sigma_a \cdot \sigma_b) = \sum \sigma_c, \quad b_i \leq c_i \leq b_{i-1}, \quad \sum c_i = a + \sum b_i.$$

Таблица 1

	Количество элементов	$\delta_{2,p,0}$	$\delta_{2,p-1,1}$...	$\delta_{p+(i-1),p-(i-1)}$...	δ_{pp}
K_1	$n-p$	0	0	...	0	...	1
K_2	$n-p+1$	0	0	...	0	...	1
K_3	$n-p+2$	0	0	...	0	...	1
...
K_i	$n-p-(i-1)$	0	0	...	1	...	1
...
K_{p-1}	$n-p+1$	0	1	...	1	...	1
K_p	$n-2p+1$	0	1	...	1	...	1
K_{p+1}	$\frac{(n-2p)(n-2p+1)}{2}$	1	1	...	1	...	1
K	$\frac{(n-2p+1)(n-2p+2)}{2}$	$\frac{(n-2p)(n-2p+1)}{2}$	$\frac{(n-2p+1)(n-2p+2)}{2}$...	$\frac{(n-p)(n-p+3-2i)}{2} + \frac{(i-1)(i-2)}{2}$...	$\frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$

Тогда $K_2 = \sigma_{10} \cdot \sigma_{10} = \sigma_{20} + \sigma_{11}$.

Сравнивая данное представление и разложение по базису, видим, что K_2 имеет следующие элементарные числовые характеристики:

$$\delta_{pp} = 1, \delta_{p+1,p-1} = 1, \delta_{p+2,p-2} = 0, \dots, \delta_{2p,0} = 0.$$

3) Рассмотрим i -тую группу ($i = 3, p+1$).

$$K_i \subset G(2, p+i+1), \quad \dim K_i = 2p, \quad \dim G(2, p+i+1) = 2(p+i-1).$$

Отсюда $\text{codim } K_i = 2(i-1)$. Значит K_i можно представить в виде линейной комбинации циклов Шуберта, коразмерность которых равна $2(i-1)$:

$$K_i = (K_i \cdot \sigma_{p+i-1,p-i+1}) \cdot \sigma_{2i-2,0} + (K_i \cdot \sigma_{p+i-2,p-i+2}) \cdot \sigma_{2i-3,1} + \dots + (K_i \cdot \sigma_{pp}) \cdot \sigma_{i-1,i-1}.$$

Вспомним, что $K_i = \Omega_{p,p+i}^2 = \sigma_{i-1,0}^2$. Применяя формулу Пиери, получим

$$K_i = \sigma_{i-1,0} \cdot \sigma_{i-1,0} = \sigma_{2i-2,0} + \sigma_{2i-3,1} + \dots + \sigma_{i-1,i-1}.$$

Сравнивая данное представление и разложение по базису, видим, что K_i имеет следующие элементарные числовые характеристики:

$$\delta_{pp} = 1, \delta_{p+1,p-1} = 1, \dots, \delta_{p+i-2,p-i+2} = 1, \delta_{p+i-1,p-i+1} = 1, \delta_{p+i,p-i} = 0, \dots, \delta_{2p,0} = 0.$$

Чтобы получить элементарные числовые характеристики многообразия K бисекант поверхности V_p^{n-p+1} нужно сложить соответствующие числовые характеристики всех компонент специализации \tilde{K} многообразия K . Результаты вычислений сведены в табл. 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Медведева Л.Б.* О многообразии бисекант нормальной кривой // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 52–56.
2. *Медведева Л.Б.* Многообразии одномерных бисекант нормальной поверхности степени $n-1$ в n -мерном проективном пространстве / Л.Б. Медведева Л.А., Сидорова // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 55-61.
3. *Гриффитс Ф.* Принципы алгебраической геометрии. Т.1 / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. М.: Мир, 1982. 496 с.
4. *Ходж В.* Методы алгебраической геометрии. Т. 2 / В. Ходж, Д. Пидо. М: ИЛ, 1954. 429 с.

УДК 517.925.52+517.926

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**О БИФУРКАЦИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
НА КОМПАКТИФИКАЦИИ ПУАНКАРЕ
ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА**

Рассматривается банахово пространство линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с ω -периодическими коэффициентами и индуцированных ими динамических систем в фазовом пространстве $\bar{\Phi}^2 := \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. Описано множество уравнений, открытое и всюду плотное в этом пространстве. Оно является объединением открытого множества Σ , состоящего из грубых уравнений, и открытого множества B_1 , состоящего из уравнений с комплексными мультипликаторами, не лежащими на единичной окружности. Множество B_1 расслаивается на гладкие вложенные подмногообразия B_1^θ , $0 < \theta < 1$, коразмерности один, состоящие из уравнений с мультипликаторами $\exp(\pm i\pi\theta)$. В границе множества грубых уравнений выделены гладкие вложенные подмногообразия коразмерности один.

Ключевые слова: линейные дифференциальные уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, проективная плоскость, грубость, мультипликаторы, бифуркационные подмногообразия.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**ON BIFURCATIONS OF LINEAR SECOND
ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC
COEFFICIENTS ON POINCARÉ COMPACTIFICATION
OF THE PHASE SPACE**

The paper considers the Banach space of inhomogeneous linear second order differential equations with ω -periodic coefficients and dynamical systems induced by them in the phase space $\bar{\Phi}^2 := \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. We describe the set of equations, which is open and everywhere dense in $\bar{\Phi}^2$. It is the union of the open set Σ consisting of structurally

rally stable equations and the open set B_1 consisting of equations with complex multipliers, do not belonging to unit circle. The set B_1 is fibered into embedded smooth manifolds B_1^θ , $0 < \theta < 1$, of codimension one, consisting of equations with multipliers equal to $\text{rexp}(\pm i\pi\theta)$. In the boundary of the set of structurally stable equations, embedded smooth submanifolds of codimension one are single out.

Keywords: linear differential equations with periodic coefficients, projective plane, structural stability, multipliers, bifurcation submanifolds.

Введение. Для линейных (неоднородных) систем дифференциальных уравнений второго порядка как с постоянными, так и с ω -периодическими коэффициентами, естественно рассматривать их продолжения на компактификации Пуанкаре их фазовых пространств, соответственно, \mathbb{R}^2 и $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ – системы дифференциальных уравнений, соответственно, на \mathbb{RP}^2 и $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. В работах [1–2] получены необходимые и достаточные условия грубости в \mathbb{RP}^2 (в $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$) относительно банахова пространства LS^2 (LS_ω^2) всех таких систем, описаны классы топологической эквивалентности грубых систем, а также показано, что во множестве негрубых систем всюду плотно объединение конечного числа (континуума) бифуркационных подмногообразий коразмерности один. Множество LE^2 (LE_ω^2) линейных неоднородных уравнений второго порядка с постоянными (ω -периодическими) коэффициентами образует линейное подпространство в LE^2 (LE_ω^2). В работе [3] даны необходимые и достаточные условия грубости в $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ относительно пространства LE_ω^2 .

В настоящей работе мы опишем бифуркационных многообразия коразмерности один в пространстве LE_ω^2 .

1. Обозначения и определения. Будем рассматривать линейные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\ell: \quad \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t), \quad (1)$$

где p, q и f непрерывные ω -периодические функции. Уравнение ℓ естественно отождествляется с векторной функцией $(p, q, f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, а множество LE_ω^2 всех таких уравнений с банаховым пространством непрерывных ω -периодических функций $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ с нормой

$$\|\ell\| := \max_t \max\{|p(t)|, |q(t)|, |f(t)|\}.$$

От уравнения ℓ перейдем к динамической системе

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(s) - q(s)x_1 - p(s)x_2, \quad \dot{s} = 1 \quad (2)$$

в фазовом пространстве $\Phi^2 := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$. Будем рассматривать \mathbb{R}^2 как аффинную часть проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Система (2) единственным образом продолжается до динамической системы на фазовом пространстве $\bar{\Phi}^2 := \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ – компактификации Пуанкаре фазового пространства Φ^2 . Ее траектории будем называть *траекториями системы ℓ в $\bar{\Phi}^2$* . «Бесконечно удаленный» тор $E := \bar{\Phi}^2 \setminus \Phi^2 \cong \mathbb{R}P^1 \times \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ состоит из траекторий.

Определение. Уравнения $\ell \in LE_\omega^2$ и $\tilde{\ell} \in LE_\omega^2$ топологически эквивалентны в $\bar{\Phi}^2$, если существует гомеоморфизм $h: \bar{\Phi}^2 \rightarrow \bar{\Phi}^2$, $h(E) = E$, переводящий ориентированные траектории системы ℓ в $\bar{\Phi}^2$ в ориентированные траектории системы $\tilde{\ell}$ в $\bar{\Phi}^2$.

2. Формулировки результатов. Пусть $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$ – нормированная фундаментальная матрица уравнения ℓ , а μ_1 и μ_2 – мультипликаторы – собственные значения матрицы монодромии $X(\omega)$.

Обозначим $\Sigma = \Sigma LE_\omega^2$ множество уравнений из LE_ω^2 , мультипликаторы которых действительны, различны и не совпадают с ± 1 . Выделим в Σ подмножества Σ_s^+ , Σ_s^- , Σ_{ns}^+ , Σ_{ns}^- , Σ_{nu}^+ и Σ_{nu}^- , состоящие из уравнений ℓ с мультипликаторами μ_1 и μ_2 , для которых $\mu_1 < 1 < \mu_2$ ($\mu_2 < -1 < \mu_1$), если $\ell \in \Sigma_s^+$ ($\ell \in \Sigma_s^-$), $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ ($-1 < \mu_1 < \mu_2 < 0$), если $\ell \in \Sigma_{ns}^+$ ($\ell \in \Sigma_{ns}^-$), $1 < \mu_1 < \mu_2$ ($\mu_1 < \mu_2 < -1$), если $\ell \in \Sigma_{nu}^+$ ($\ell \in \Sigma_{nu}^-$).

Теорема [2]. Уравнение $\ell \in LE_\omega^2$ является грубым в $\bar{\Phi}^2$ тогда и только тогда, когда она принадлежит множеству $\Sigma = \Sigma LE_\omega^2$.

Обозначим

$$B_{1,s}^\theta, B_{1,u}^\theta, \theta \in (0,1), B_{2,s}^\pm, B_{2,u}^\pm, B_{3,s}^\pm, B_{3,u}^\pm - \quad (3)$$

множества линейных уравнений $\ell \in LE_\omega^2$ с мультипликаторами μ_1, μ_2 следующего вида. Для $B_{1,s}^\theta$ ($B_{1,u}^\theta$) $\mu_{1,2} = \rho e^{\pm i2\theta}$, $0 < \rho < 1$ ($\rho > 1$). Для $B_{2,s}^+$, $B_{2,s}^-$, $B_{2,u}^+$ и $B_{2,u}^-$ мультипликаторы $\mu_1 = \mu_2$ и отвечают одному элементарному делителю, кроме того, соответственно, $0 < \mu_1 < 1$, $-1 < \mu_1 < 0$, $\mu_1 > 1$ и $\mu_1 < -1$. Для $B_{3,s}^-$ ($B_{3,u}^-$) $\mu_1 = -1$, $-1 < \mu_2 < 0$ ($\mu_1 = -1$, $\mu_2 < -1$). Определим также множества $B_{3,s}^+$ ($B_{3,u}^+$) уравнений $\ell \in LE_\omega^2$, у которых

$\mu_1 = 1, 0 < \mu_2 < 1$ ($\mu_1 = 1, \mu_2 > 1$) и нет периодических траекторий в Φ^2 ; последнее равносильно тому, что ранг матрицы, полученной добавлением столбца $a = X(\omega) \int_0^\omega X^{-1}(t)b(t)dt$ к матрице $X(\omega) - E$, равен двум.

Теорема 1. 1) Множества $B_{1,s}^\theta, B_{1,u}^\theta, \theta \in (0,1), B_{2,s}^\pm, B_{2,u}^\pm, B_{3,s}^\pm, B_{3,u}^\pm$ являются вложенными C^∞ -подмногообразиями LE_ω^2 коразмерности один.

2) Каждое из этих множеств состоит из топологически эквивалентных в Φ^2 уравнений.

3) Для любого уравнения $\ell_0 \in B_{2,s}^\pm$ ($\ell_0 \in B_{2,u}^\pm$) существует такая окрестность $U(\ell_0)$, что $U(\ell_0) \setminus B_{2,s}^\pm$ ($U(\ell_0) \setminus B_{2,u}^\pm$) состоит из двух связных компонент, одна из которых принадлежит Σ_{ns}^\pm (Σ_{nu}^\pm), а другая $\bigcup_{\theta \in (0,1)} B_{1,s}^\theta$ ($\bigcup_{\theta \in (0,1)} B_{1,u}^\theta$).

4) Для любого уравнения $\ell_0 \in B_{3,s}^\pm$ ($\ell_0 \in B_{3,u}^\pm$) существует такая окрестность $U(\ell_0)$, что $U(\ell_0) \setminus B_{3,s}^\pm$ ($U(\ell_0) \setminus B_{3,u}^\pm$) состоит из двух связных компонент, одна из которых принадлежит Σ_{ns}^\pm (Σ_{nu}^\pm), а другая Σ_s^\pm .

Замечания. 1. Структура фазовых портретов уравнений, принадлежащих перечисленным множествам, описана в [2]. Наглядное представление о бифуркациях при переходе через $B_{2,s}^+$ и $B_{3,s}^+$ дают рис. 1 и 2, где проективная плоскость \mathbb{RP}^2 представлена в виде круга с отождествленными диаметрально противоположными точками, а для отображения Пуанкаре на \mathbb{RP}^2 условно изображены жирными точками – неподвижные точки, сплошными линиями – инвариантные многообразия неподвижных точек, пунктиром – «типичные» траектории.

2. Объединение множеств $B_{2,s}^\pm, B_{2,u}^\pm, B_{3,s}^\pm, B_{3,u}^\pm$ открыто в границе $\bar{\Sigma} \setminus \Sigma$ множества Σ грубых уравнений. Скорее всего, оно и плотно в $\bar{\Sigma} \setminus \Sigma$. Однако доказательства у автора нет.

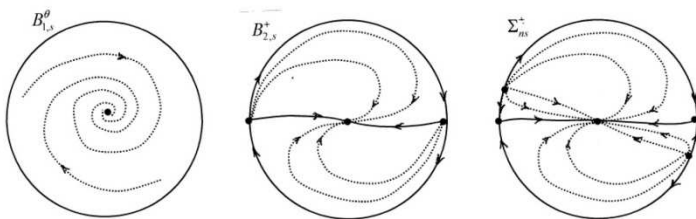


Рис. 1. Бифуркации при переходе через бифуркационное многообразие $B_{2,s}^+$

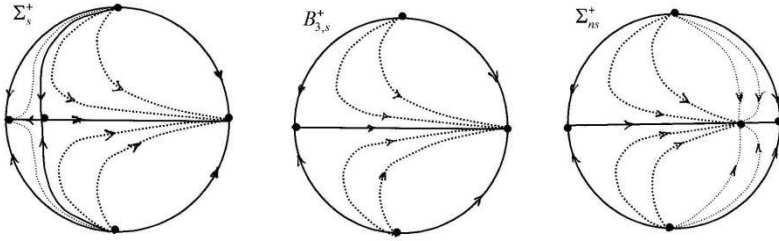


Рис. 2. Бифуркации при переходе через бифуркационное многообразие $B_{3,s}^+$

Теорема 2. Множество $\Sigma \text{LE}_\omega^2 \cup \bigcup_{\theta \in (0,1)} (B_{1,s}^\theta \cup B_{1,u}^\theta)$ открыто и всюду плотно в LE_ω^2 .

Теорема 2 фактически доказана в работе [3].

3. Доказательство теоремы 1. Определим непрерывные функции

$$p_* : \mathbb{R} \times \text{LE}_\omega^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q_* : \mathbb{R} \times \text{LE}_\omega^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{и} \quad f_* : \mathbb{R} \times \text{LE}_\omega^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

положив для уравнения $\ell : \ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = f(t)$ и числа $t \in \mathbb{R}$

$$p_*(t, \ell) := p(t), \quad q_*(t, \ell) := q(t) \quad \text{и} \quad f_*(t, \ell) := f(t).$$

Функции $\ell \rightarrow p_*(t, \ell)$, $\ell \rightarrow q_*(t, \ell)$ и $\ell \rightarrow f_*(t, \ell)$ линейны, а потому и бесконечно дифференцируемы. Пусть $x_k^*(t, \ell)$, $k=1, 2$, – решения однородного уравнения $\ddot{x} + p_*(t, \ell)\dot{x} + q_*(t, \ell)x = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $x_1^*(0, \ell) = 1$, $\dot{x}_1^*(0, \ell) = 0$ и $x_2^*(0, \ell) = 0$, $\dot{x}_2^*(0, \ell) = 1$. Они непрерывно дифференцируемы по переменным (t, ℓ) и бесконечно дифференцируемы по ℓ .

Матрица $X(t, \ell) = \begin{pmatrix} x_1^*(t, \ell) & x_2^*(t, \ell) \\ \dot{x}_1^*(t, \ell) & \dot{x}_2^*(t, \ell) \end{pmatrix}$ – нормированная фундаментальная матрица уравнения ℓ . Обозначим

$$A(\ell) := (x_1^*(\omega, \ell) + \dot{x}_1^*(\omega, \ell))/2, \quad W(t, \ell) = \det X(t, \ell) = \exp\left(-\int_0^t p_*(s, \ell) ds\right).$$

Пусть $\mu_1^*(\ell)$ и $\mu_2^*(\ell)$ мультипликаторы уравнения ℓ .

Возьмем уравнение $\ell_0 \in B_{1,s}^\theta$. Тогда $x_2^*(\omega, \ell_0) \neq 0$, $W(\omega, \ell_0) = |\mu_1^*(\ell_0)|^2 < 1$ и $W(\omega, \ell_0) > A^2(\ell_0)$. Выберем такую окрестность $U(\ell_0)$ уравнения ℓ_0 , что $\forall \ell \in U(\ell_0) W(\omega, \ell) < 1$, $W(\omega, \ell) > A^2(\ell)$. Тогда уравнение $\ell \in U(\ell_0)$ имеет комплексные мультипликаторы

$$\mu_{1,2}^*(\ell) = A(\ell) \pm i\sqrt{W(\omega, \ell) - A^2(\ell)} = \sqrt{W(\omega, \ell)} e^{\pm izF(\ell)},$$

где $F(\ell) = \operatorname{arccotg} \frac{A(\ell)}{\sqrt{W(\omega, \ell) - A^2(\ell)}}$, $F(\ell_0) = \theta$. Функция $F : U(\ell_0) \rightarrow \mathbb{R}$

бесконечно дифференцируема. Покажем, что ее производная $F'(\ell_0) : \operatorname{LE}_\omega^2 \rightarrow \mathbb{R}$ отлична от нуля.

Выберем число N , удовлетворяющее условиям

$$N > 1, \quad N > \max_{t \in [0, \omega]} \max \{ |x_k^*(t, \ell_0)|, |\dot{x}_k^*(t, \ell_0)| \}, \quad N > 20 |x_2(\omega)|, \quad (4)$$

и затем число $\delta \in (0, \omega)$ так, чтобы

$$\forall t \in [0, \delta] \quad 2^{-1} < x_1^*(t, \ell_0) < 2, \quad |\dot{x}_1^*(t, \ell_0)| < N^{-2}, \quad |x_2^*(t, \ell_0)| < N^{-2}, \\ 0 < \dot{x}_2^*(t, \ell_0) < 2, \quad 2^{-1} < W^{-1}(t, \ell_0) < 2. \quad (5)$$

Пусть $g(t)$ – такая непрерывная ω -периодическая функция, что

$$g(t) = 0 \text{ при } t \in [\delta, \omega], \quad 0 < g(t) \leq 2 \text{ при } t \in (0, \delta), \quad \int_0^\delta g(t) dt = \delta, \quad (6)$$

Рассмотрим уравнения $h \in \operatorname{LE}_\omega^2 : \ddot{x} - \varepsilon g(t)x = 0$ и

$$\ell_\varepsilon = \ell_0 + \varepsilon h \in \operatorname{LE}_\omega^2 : \ddot{x} + p(t)\dot{x} + (q(t) - \varepsilon g(t))x = f(t).$$

При достаточно малых $|\varepsilon|$ $\ell_\varepsilon \in U(\ell_0)$.

Производная $y_k(t) = \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} x_k^*(t, \ell_\varepsilon)$ ($k=1, 2$) удовлетворяет уравнению в вариациях $\ddot{y}_k + p_*(t, \ell_0)\dot{y}_k + q_*(t, \ell_0)y_k = g(t)x_k^*(t, \ell_0)$ и нулевым начальным условиями: $y_k(0) = \dot{y}_k(0) = 0$. Поэтому

$$y_k(\omega) = -x_1^*(\omega, \ell_0) \int_0^\omega W^{-1}(t, \ell_0) g(t) x_k^*(t, \ell_0) x_2^*(t, \ell_0) dt + \\ + x_2^*(\omega, \ell_0) \int_0^\omega W^{-1}(t, \ell_0) g(t) x_k^*(t, \ell_0) x_1^*(t, \ell_0) dt, \quad (7)$$

$$y_2'(\omega) = -\dot{x}_1^*(\omega, \ell_0) \int_0^\omega W^{-1}(t, \ell_0) g(t) x_2^{*2}(t, \ell_0) dt + \\ + \dot{x}_2^*(\omega, \ell_0) \int_0^\omega W^{-1}(t, \ell_0) g(t) x_1^*(t, \ell_0) x_2^*(t, \ell_0) dt. \quad (8)$$

Из (4) – (6) получаем

$$\int_0^\omega W^{-1}(t, \ell_0) g(t) x_1^{*2}(t, \ell_0) dt \geq \delta/8. \quad (9)$$

$$0 \leq \int_0^{\omega} W^{-1}(t, \ell_0) g(t) x_2^{*2}(t, \ell_0) dt \leq 2\delta / N^2,$$

$$\left| \int_0^{\omega} W^{-1}(t, \ell_0) g(t) x_1^*(t, \ell_0) x_2^*(t, \ell_0) dt \right| \leq 4\delta / N^2. \quad (10)$$

Вследствие (7) – (10) и (4)

$$2 \left| \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} A(\ell_\varepsilon) = |y_1(\omega) + y_2'(\omega)| \geq |x_2(\omega)| \delta / 8 - 10\delta / N > 0.$$

Поскольку $W(\omega, \ell_\varepsilon) = W(\omega, \ell_0)$, то отсюда получаем, что

$F'(\ell_0)h = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} F(\ell_0) \neq 0$ и $F'(\ell_0) \neq 0$. Уменьшив при необходимости окрестность $U(\ell_0)$, мы можем считать, что $F'(\ell) \neq 0 \forall \ell \in U(\ell_0)$. Учитывая, что $\forall \ell \in U(\ell_0) W(\omega, \ell) < 1$, имеем $F^{-1}(\theta) = B_{1s}^\theta \cap U(\ell_0)$. Тем самым, B_{1s}^θ – вложенное C^∞ -подмногообразие в LE_ω^2 . Аналогично получаем, что и B_{1u}^θ – вложенное C^∞ -подмногообразие.

Пусть теперь $\ell_0 \in B_{2,s}^+$. В этом случае $A^2(\ell_0) = W(\omega, \ell_0)$ и $\mu_{1,2}^*(\ell_0) = A(\ell_0) < 1$. Выберем такую окрестность $V(\ell_0)$ уравнения ℓ_0 , что $\forall \ell \in V(\ell_0) \mu_k^*(\ell) < 1$ ($k=1,2$). На $V(\ell_0)$ рассмотрим C^∞ -функцию $F(\ell) := A^2(\ell) - W(\omega, \ell)$. Уравнение ℓ_ε определим как и выше.

Если $x_2^*(\omega, \ell_0) \neq 0$, то

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} A(\ell_\varepsilon) \neq 0. \quad (11)$$

Если $x_2^*(\omega, \ell_0) = 0$, то $x_1^*(\omega, \ell_0) = \dot{x}_2^*(\omega, \ell_0) = \mu_{1,2}^*(\ell_0) = A(\ell_0)$, $\dot{x}_1^*(\omega, \ell_0) \neq 0$.

Из (7) – (8) получим

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} A(\ell_\varepsilon) = -\frac{1}{2} x_1^*(\omega, \ell_0) \int_0^{\omega} W^{-1}(t, \ell_0) g(t) x_2^{*2}(t, \ell_0) dt. \quad (12)$$

Функция $x_2^*(\cdot, \ell_0)$ не равна тождественно нулю на $(0, \delta)$. Если бы это было не так, то $\dot{x}_2^*(t, \ell_0)$, а потому и $W(t, \ell_0)$ обращалось бы в нуль, что невозможно. Поскольку $\dot{x}_2^*(t, \ell_0)$, $W^{-1}(t, \ell_0)$ и $g(t)$ непрерывны, $W^{-1}(t, \ell_0) > 0$, $g(t) > 0$ при $t \in (0, \delta)$, то из (12) следует неравенство (11).

Учитывая, что $W(\omega, \ell_\varepsilon) = W(\omega, \ell_0)$ не зависит от ε , из (11) полу-

чаем $F'(\ell_0)h = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} F(\ell_0) \neq 0$ и потому $F'(\ell_0) \neq 0$. Тогда

$LE_\omega^2 = \Pi \oplus \ker F'(\ell_0)$, где Π – одномерное подпространство, $F'(\ell_0)|_\Pi \neq 0$.

По теореме о неявной функции существует такой C^∞ -диффеоморфизм χ множества $(-c, c) \times \Lambda$, где $c > 0$, $\Lambda = \{\lambda \in \ker F'(\ell_0) : \|\lambda\| < c\}$, на окрестность $U(\ell_0)$ уравнения ℓ_0 , что $\chi(0, 0) = \ell_0$, $F(\chi(c, \lambda)) = c$. Уменьшив при необходимости c , мы можем считать, что $\forall \ell \in U(\ell_0)$ $\dot{x}_1^*(\omega, \ell) \neq 0$. Учитывая, что $\forall \ell \in U(\ell_0)$ $\mu_k^*(\ell) < 1$ ($k=1, 2$), имеем $F^{-1}(0) = B_{2,s}^+ \cap U(\ell_0) = \chi(0 \times \Lambda)$. Тем самым, $B_{2,s}^+$ – вложенное C^∞ -подмногообразие в LE_ω^2 , а $U(\ell_0) \setminus B_{2,s}^+$ состоит из двух компонент $F^{-1}(-c, 0) = \chi((-c, 0) \times \Lambda)$ и $F^{-1}(0, c) = \chi((0, c) \times \Lambda)$, одна из которых принадлежит $\bigcup_{\theta \in (0,1)} B_{1,s}^\theta$, а другая Σ_{ns}^+ . Аналогично получаем утверждения 1) и 3) теоремы для $B_{2,s}^-$ и $B_{2,u}^\pm$.

Пусть $\ell_0 \in B_{3,s}^+$. Мы можем выбрать такую окрестность $U(\ell_0)$ уравнения ℓ_0 , что любое уравнение $\ell \in U(\ell_0)$ имеет различные мультипликаторы $\mu_1^*(\ell)$ и $\mu_2^*(\ell)$, гладко зависящие от $\ell \in U(\ell_0)$, причем $\mu_1^*(\ell_0) = 1$, $0 < \mu_2^*(\ell) < 1$. Пусть $F(\ell) := \mu_1^*(\ell) - 1$. Обозначим $\varphi(t) := \int_0^t \sin^2(2\pi s / \omega) ds$. Замена $y = x \exp \varepsilon \varphi(t)$ переводит уравнение

$$\ddot{x} + p_*(t, \ell_0) \dot{x} + q_*(t, \ell_0) x = 0 \tag{13}$$

в уравнение

$$\ddot{y} + (p_*(t, \ell_0) + \varepsilon d_1(t, \varepsilon)) \dot{y} + (q_*(t, \ell_0) + \varepsilon d_0(t, \varepsilon)) y = 0, \tag{14}$$

где $d_0(t, \varepsilon)$ и $d_1(t, \varepsilon)$ непрерывные функции, ω -периодические по t .

Пусть

$$h \in LE_\omega^2 : \ddot{x} + \varepsilon d_1(t, 0) \dot{x} + \varepsilon d_0(t, 0) x = 0,$$

$$\ell_\varepsilon = \ell_0 + \varepsilon h : \ddot{x} + (p_*(t, \ell_0) + \varepsilon d_1(t, 0)) \dot{x} + (q_*(t, \ell_0) + \varepsilon d_0(t, 0)) x = f_*(t, \ell_0).$$

Если $x(t)$ – решение уравнения (13), то $y(t) = x(t) \exp \varepsilon \varphi(t)$ является решением уравнения (14), при этом $y(0) = x(0)$, $\dot{y}(0) = \dot{x}(0)$, $y(\omega) = x(\omega) \exp \varepsilon \varphi(\omega)$ и $\dot{y}(\omega) = \dot{x}(\omega) \exp \varepsilon \varphi(\omega)$. Следовательно,

$$X(\omega, \ell_\varepsilon) = (\exp \varepsilon \varphi(\omega)) X(\omega, \ell_0)$$

и

$$\mu_1^*(\ell_\varepsilon) = (\exp \varepsilon \varphi(\omega)) \mu_1^*(\ell_0) = \exp \varepsilon \varphi(\omega).$$

Поэтому

$$F'(\ell_0)h = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \mu_1^*(\ell_\varepsilon) = \varphi(\omega) \neq 0.$$

Таким образом, $F'(\ell_0) \neq 0$. Отсюда, как и выше, получаем утверждения 1) и 3) теоремы для $B_{3,s}^+$. Для $B_{3,s}^-$ и $B_{3,u}^\pm$ доказательство аналогично.

Утверждение 2) теоремы следует из [2], где описана структура фазовых портретов систем из LS_ω^2 , а потому и уравнений из LE_ω^2 , с соответствующими мультипликаторами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ройтенберг В.Ш.* Грубость и бифуркации векторных полей на проективной плоскости, полученных продолжением линейных векторных полей // Математика и информатика, астрономия и физика, экономика и технология и совершенствование их преподавания: Материалы междунар. конф. "Чтения Ушинского". Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2015. С. 20–26.
2. *Ройтенберг В.Ш.* О структуре пространства систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Вестник Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1: Математика. Физика. 2017. № 1 (38). С. 13–21. DOI: <https://doi.org/10.15688/jvolsu1.2017.1.2>
3. *Ройтенберг В.Ш.* О грубости относительно пространства линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20, № 5. С. 27–31. DOI: <https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu1.2017.5.3>
4. *Ройтенберг В.Ш.* О бифуркациях периодических траекторий линейных неоднородных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 66–71.

УДК 517.925

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ОКРУЖНОСТИ, БЛИЗКИХ К ИНТЕГРИРУЕМЫМ

Рассматриваются автономное дифференциальное уравнение второго порядка на окружности, зависящее от малого параметра, и соответствующая динамическая система на цилиндрическом фазовом пространстве. При нулевом значении параметра эта система предполагается интегрируемой и имеющей континуум периодических траекторий, не гомотопных нулю. В типичном случае доказывается существование при малых ненулевых значениях параметра грубых предельных циклов, не гомотопных нулю.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение второго порядка на окружности, цилиндрическое фазовое пространство, предельный цикл.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

ON SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE CIRCLE CLOSE TO INTEGRABLE EQUATIONS

We consider an autonomous differential equation of the second order on a circle depending on a small parameter and the corresponding dynamical system on the cylindrical phase space. For zero value of the parameter, this system is assumed to be integrable with a continuum of periodic trajectories that are not homotopic to zero. In the generic case, the existence of coarse limit cycles for small values of the parameter is proved.

Keywords: second-order differential equation on the circle, cylindrical phase space, limit cycle.

Дифференциальные уравнения второго порядка $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$, заданные на окружности, то есть с правой частью периодической по x , и соответствующие им динамические системы на фазовом цилиндре рассматривались, например, в книгах [1–3]. Для ряда конкретных уравнений там были описаны фазовые портреты и, в частности, получены условия существования периодических траекторий. В работах [4–8] изучались уравнения с правой частью, являющейся полиномом степени $n \leq 3$ относительно \dot{x} . Были изучены бифуркации рождения предельных циклов из «бесконечности», получены условия существования предельных циклов второго рода (не гомотопных нулю на фазовом цилиндре).

В настоящей статье рассматриваются условия рождения предельных циклов второго рода при малых возмущениях интегрируемых уравнений, имеющих континуум периодических траекторий, не гомотопных нулю. Статья является расширенным вариантом (с доказательствами) доклада [10] на конференции «Математические методы в технике и технологиях. ММТТ-31».

1. Невозмущенное уравнение

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$X_0: \ddot{x} = g_0(x), \quad (1)$$

где $g_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – ω -периодическая C^2 -функция с нулевым средним значением:

$$\int_0^\omega g_0(x) dx = 0. \quad (2)$$

Можно считать, что уравнение (1) задано на окружности $S^1 = \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$.

Перейдем от уравнения (1) к автономной системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = g_0(x) \quad (3)$$

на цилиндре $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Ее траектории являются интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g_0(x)}{y}. \quad (4)$$

Ввиду (2) функция $G_0(x) := \int_0^x g_0(s) ds$ является ω -периодической.

Пусть функция g_0 ненулевая. Вследствие (2) без ограничения общности можно считать, что $g_0(0) < 0$. Тогда число $m := \min_{x \in [0, \omega]} G_0(x)$ отрицательно. Обозначим $\underline{h} := \sqrt{2|m|}$. Будем считать, что существует единственная точка $x_0 \in \mathbb{S}^1$, в которой $G_0(x_0) = m$. В этой точке $G'_0(x_0) = g_0(x_0) = 0$. Следовательно, $x_0 \neq 0$. Будем также предполагать, что x_0 – невырожденная критическая точка функции $G_0(x)$, то есть $G''_0(x_0) = g'_0(x_0) > 0$. Для уравнения X_0 это означает, что его особая точка $S_0 = (x_0, 0)$ – грубое седло.

Если $g_0(x) \equiv 0$, то положим $\underline{h} := 0$.

При любом $h > \underline{h}$ уравнение (4) имеет ω -периодическое решение $Y_0(x, h) = \sqrt{h^2 + 2G_0(x)}$, $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее начальному условию $Y_0(0, h) = h$. Функция $Y_0(x, h)$ определена и непрерывна и при $h = \underline{h}$, а уравнение $y = Y_0(x, \underline{h})$ задает петлю сепаратрисы седла S_0 .

Пусть $\bar{h} > \underline{h}$. Обозначим

$$\begin{aligned} D &:= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq Y_0(x, 2\bar{h})\}, \quad D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq Y_0(x, \bar{h})\}, \\ D_0 &:= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : Y_0(x, \underline{h}) \leq y \leq Y_0(x, \bar{h})\}, \\ L_h &:= \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} : y = Y_0(x, h)\}, \quad h \in [\underline{h}, \bar{h}]. \end{aligned}$$

2. Однопараметрические деформации невозмущенного уравнения

Однопараметрическая деформация уравнения X_0 в D – семейство

$\{X_\mu\}_{|\mu| < \sigma}$ дифференциальных уравнений на окружности $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z}$ вида

$$X_\mu : \quad \ddot{x} = g_0(x) + \mu g_1(x, \dot{x}, \mu), \quad \mu \in [-\sigma, \sigma], \quad (5)$$

где $g_1(x, y, \mu)$, $(x, y, \mu) \in D \times [-\sigma, \sigma]$, – C^2 -функция.

Множество $F(X_0, \sigma)$ всех однопараметрических деформации $\xi = \{X_\mu\}_{|\mu| < \sigma}$ уравнения X_0 отождествим с линейным пространством C^2 -функций $g_1 : D \times [-\sigma, \sigma] \rightarrow \mathbb{R}$. Введем в нем норму, положив

$$\|\xi\| := \max_{\substack{(x,y) \in D \\ |\mu| \leq \sigma}} \{ |g_1(x, y, \mu)|, |(g_1)'_y(x, y, \mu)| \}.$$

Далее будем рассматривать семейства $\{X_\mu\}_{|\mu| < \sigma}$, для которых

$$g_1(x, y, 0) > 0 \quad \text{при } y = Y_0(x, \underline{h}), \quad x \in \mathbb{S}^1, \quad (6)$$

$$g_1(x, y, 0) < 0 \quad \text{при } y = Y_0(x, \bar{h}), \quad x \in \mathbb{S}^1. \quad (7)$$

Они образуют открытое подмножество в $F(X_0, \sigma)$, которое мы обозначим $F_+(X_0, \sigma)$.

Траектории уравнений X_μ – это траектории автономной системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = g_0(x) + \mu g_1(x, y, \mu)$$

на цилиндре $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Эту систему, а также соответствующее векторное поле $y\partial/\partial x + (g_0(x) + \mu g_1(x, y, \mu))\partial/\partial y$ будем также обозначать X_μ . Траектории, лежащие в $\mathbb{S}^1 \times (0, \infty)$, являются и интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g_0(x) + \mu g_1(x, y, \mu)}{y}. \quad (8)$$

Для $h \in (\underline{h}, \bar{h})$ найдется такое число $\sigma_h > 0$, что при $|\mu| < \sigma_h$ определено решение $Y(x, h, \mu)$, $x \in (-\omega, 2\omega)$ уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $Y(0, h, \mu) = h$; при этом $Y \in C^2$. Запишем его в виде

$$Y(x, h, \mu) = Y_0(x, h) + \mu Y_1(x, h, \mu). \quad (9)$$

Функция $Y_1(x, h, 0) = \partial Y(x, h, 0) / \partial \mu$ удовлетворяет уравнению в вариациях

$$dY_1/dx = -g_0(x)Y_0^{-2}(x, h)Y_1 + g_1(x, 0, 0)$$

и начальному условию $Y_1(0, h, 0) = 0$. Поэтому

$$Y_1(x, h, 0) = Y_0^{-1}(x, h) \int_0^x Y_0(s, h) g_1(s, Y_0(x, h), 0) ds \quad (10)$$

Определим функцию

$$J(h) := Y_1(\omega, h, 0), \quad h \in (\underline{h}, \bar{h}]. \quad (11)$$

Из (10) и равенства $Y_0(\omega, h) = h$ получаем

$$J(h) = h^{-1} \int_0^\omega Y_0(x, h) g_1(x, Y_0(x, h), 0) dx, \quad h \in (\underline{h}, \bar{h}]. \quad (12)$$

Если $g_0(x)$ ненулевая функция, то $\underline{h} > 0$. Тогда формула (12) определяет $J(h)$ и при $h = \underline{h}$, при этом $J(h)$ будет непрерывной на $[\underline{h}, \bar{h}]$. Если $g_0(x) \equiv 0$, то $\underline{h} = 0$, $Y_0(x, h) \equiv h$. Из (12) имеем $J(h) = \int_0^\omega g_1(x, h, 0) dx$ при $h \in (\underline{h}, \bar{h}]$. Положив $J(\underline{h}) := \int_0^\omega g_1(x, 0, 0) dx$, получим непрерывную функцию на $[\underline{h}, \bar{h}]$. Из (6) и (7) следует, что

$$J(\underline{h}) > 0, \quad J(\bar{h}) < 0. \quad (13)$$

Определим непрерывную функцию $\tilde{J}: [\underline{h}, \bar{h}] \times F_+(X_0, \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, положив для $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$ и семейства $\xi = \{X_\mu\}_{|\mu| < \sigma}$ из $F_+(X_0, \sigma)$ $\tilde{J}(h, \xi) = J(h)$. В точках $(\underline{h}, \bar{h}) \times F_+(X_0, \sigma)$ она непрерывно дифференцируема.

Функция h а $Y(\omega, h, \mu)$ – функция последования по траекториям уравнения X_μ , а функция $d(h, \mu) := Y(\omega, h, \mu) - h$ – функция расхождения. Значения h , при которых $Y(x, h, \mu)$ – периодическое решение уравнения (8) для $\mu \neq 0$ – нули функции расхождения. Из (9) и равенства $Y_0(\omega, h) = h$ получаем, что $d(h, \mu) = \mu Y_1(\omega, h, \mu)$. Отсюда и из (11) следует, что если $J(h) \neq 0$, то $Y(x, h, \mu)$ – непериодическое решение уравнения (8) при достаточно малых $|\mu| \neq 0$.

3. Типичные семейства из $F_+(X_0, \sigma)$

Пусть $SF_+(X_0, \sigma)$ – подмножество $F_+(X_0, \sigma)$, состоящее из семейств уравнений, для которых $J(h)$ имеет только простые нули. Покажем, что семейства из $SF_+(X_0, \sigma)$ типичны.

Теорема 1. Множество $SF_+(X_0, \sigma)$ открыто и всюду плотно в $F_+(X_0, \sigma)$.

Доказательство. Пусть семейство $\xi = \{X_\mu\}_{|\mu| < \sigma}$ принадлежит $SF_+(X_0, \sigma)$. Пусть $h_i, i = 1, \dots, n$, – нули $\tilde{J}(h, \xi) = J(h)$, пронумерованные в порядке возрастания. Ввиду (13) $h_1 > \underline{h}$, $h_n < \bar{h}$. Пусть также $h_0 := \underline{h}$, $h_{n+1} := \bar{h}$. Так как $\tilde{J}'_h(h_i, \xi) = J'(h_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$, то по теореме о неявной

функции существуют такие число $\varepsilon \leq (1/3) \min_{i=0,1,\dots,n} (h_{i+1} - h_i)$ и окрестность U семейства ξ в $F_+(X_0, \sigma)$, что для всех $\tilde{\xi} \in U$ и $i = 1, \dots, n$ функция $\tilde{J}(\cdot, \tilde{\xi})$ имеет в интервале $(h_i - \varepsilon, h_i + \varepsilon)$ единственный, причем простой нуль. Вследствие компактности отрезков $[\underline{h}, h_1 - \varepsilon]$, $[h_n + \varepsilon, \bar{h}]$, $[h_i + \varepsilon, h_{i+1} - \varepsilon]$, $i = 1, \dots, n-1$, и непрерывности \tilde{J} окрестность U можно выбрать столь малой, что при $\tilde{\xi} \in U$ $\tilde{J}(h, \tilde{\xi}) \neq 0$ во всех точках h этих отрезков. Тем самым $\forall \tilde{\xi} \in U$ нули функции $\tilde{J}(\cdot, \tilde{\xi})$ принадлежат (\underline{h}, \bar{h}) и они простые. Иначе говоря, $U \subset SF_+(X_0, \sigma)$, то есть $SF_+(X_0, \sigma)$ – открытое множество.

Докажем плотность $SF_+(X_0, \sigma)$ в $F_+(X_0, \sigma)$. Пусть семейство (5) принадлежит множеству $F_+(X_0, \sigma) \setminus SF_+(X_0, \sigma)$, а U – его произвольная окрестность в $F_+(X_0, \sigma)$. Рассмотрим семейство уравнений

$$\xi^\alpha = \{X_\mu^\alpha\}_{|\mu| \leq \sigma} : \ddot{x} = g_0(x) + \mu(g_1(x, \dot{x}, \mu) - \alpha).$$

Если $|\alpha|$ достаточно мал, то оно принадлежит окрестности U . Функцию $J^\alpha(h) = \tilde{J}(h, \xi^\alpha)$ можно записать в виде $J^\alpha(h) = J(h) - \alpha A(h)$, где $A(h) = h^{-1} \int_0^\omega Y_0(s, h) ds$, если g_0 – ненулевая функция и $A(h) = \omega$, если g_0 – нулевая функция. В обоих случаях $A(h) > 0$ при всех $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$. При рассматриваемых α $J^\alpha(\underline{h}) \neq 0$, $J^\alpha(\bar{h}) \neq 0$. По теореме Сарда [9] существует сколь угодно малое не критическое значение $\alpha > 0$ функции $f(h) := J(h)/A(h)$, $h \in (\underline{h}, \bar{h})$, то есть, если $f(h) = \alpha$, то $f'(h) \neq 0$. Но равенство $f(h) = \alpha$ равносильно равенству $J^\alpha(h) = 0$, а неравенство

$$f'(h) = (J'(h)A(h) - J(h)A'(h)) / A^2(h) \neq 0$$

при $f(h) = J(h)/A(h) = \alpha$ принимает вид $(J^\alpha)'(h) = J'(h) - \alpha A'(h) \neq 0$. То есть все нули у $J^\alpha(h)$ простые. Следовательно, $\bar{\xi} \in SF_+(X_0, \sigma) \cap U$ и потому $SF_+(X_0, \sigma)$ всюду плотно в $F_+(X_0, \sigma)$.

4. Предельные циклы уравнений из типичных семейств

Ввиду (13) число нулей функции $J(h)$ для семейства из $SF_+(X_0, \sigma)$ нечетно.

Теорема 2. Пусть семейство уравнений $\{X_\mu\}_{|\mu|<\sigma}$ принадлежит $SF_+(X_0, \sigma)$ и $h_i, i=1, \dots, n$, – все нули функции $J(h)$, пронумерованные в порядке возрастания. Тогда существует такое $\delta \in (0, \sigma)$ и такие C^1 -функции $H_i(\mu), \mu \in (-\delta, \delta), i=1, \dots, n$, что $H_i(0) = h_i$, для любого $\mu \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ уравнение $y = Y(x, H_i(\mu), \mu)$ задает грубый предельный цикл Γ_i уравнения X_μ , лежащий в D_0 . При $\mu \in (0, \delta) (\mu \in (-\delta, 0))$ предельные циклы Γ_i с нечетными номерами устойчивые (неустойчивые), а четными номерами неустойчивые (устойчивые). Других периодических траекторий, принадлежащих D , уравнение X_μ при $\mu \in (0, \delta)$ и $\mu \in (-\delta, 0)$ не имеет.

Доказательство. Очевидно, что гомотопных нулю периодических траекторий у уравнения X_μ в D быть не может.

Из неравенств (6) и (7) следует, что найдутся такие числа $0 < \varepsilon_1 < 1/3 \min\{h_1 - \underline{h}, \bar{h} - h_n\}$ и $\delta_1 > 0$, что $\forall \mu \in (-\delta_1, \delta_1)$

$$g_1(x, y, \mu) > 0 \text{ при } Y_0(x, \underline{h}) \leq y \leq Y_0(x, \underline{h} + \varepsilon_1), x \in \mathbb{S}^1, \quad (14)$$

и

$$g_1(x, y, \mu) < 0 \text{ при } Y_0(x, \bar{h} - \varepsilon_1) \leq y \leq Y_0(x, \bar{h}), x \in \mathbb{S}^1. \quad (15)$$

Из (14) получаем, что при $h \in (\underline{h}, \underline{h} + \varepsilon_1]$ во всех точках кривой $L_h: y = Y_0(x, h), x \in [0, \omega]$, векторное поле $X_\mu, 0 < |\mu| < \delta_1$, трансверсально этой кривой и направлено в область $\{(x, y) \in D: y > Y_0(x, h)\}$. Кривая L_h негладкая в точке $(x_0, 0)$, являющейся седлом уравнения X_0 . Но ее можно разбить на две гладкие дуги $y = Y_0(x, \underline{h}), x \in [0, x_0]$, и $y = Y_0(x, \underline{h}), x \in [x_0, \omega]$, в точках которых векторное поле X_μ при $\mu \in (0, \delta_1)$ и $-X_\mu$ при $\mu \in (-\delta_1, 0)$ имтрансверсально и направлено в область $\{(x, y) \in D: y > Y_0(x, h)\}$. Поэтому через точки с координатами $x = 0, y = h, h \in [\underline{h}, \underline{h} + \varepsilon_1]$ не проходят периодические траектории уравнения $X_\mu, 0 < |\mu| < \delta_1$, лежащие в D_0 . Аналогично из (15) получаем, что и через точки с координатами $x = 0, y = h, h \in [\bar{h} - \varepsilon_1, \bar{h}]$ не проходят периодические траектории уравнения $X_\mu, 0 < |\mu| < \delta_1$, лежащие в D_0 . Пусть периодическая траектория Γ уравнения $X_\mu, 0 < |\mu| < \delta_1$, проходит через точку с координатами $x = 0, y = h \in [0, \underline{h}]$. Тогда она имеет уравнение $y = \tilde{y}(x)$,

$x \in [0, \omega]$, где $\bar{y}(x) \geq 0$. Так как $Y_0(x_0, \underline{h}) = 0$, где $(x_0, 0)$ - седло уравнения X_0 , то Γ имеет общие точки с кривой $L_{\underline{h}}$. Но это противоречит приведенному выше описанию поведения векторного поля X_μ в точках $L_{\underline{h}}$ и периодичности Γ .

Так как

$$Y_1(\omega, h_i, 0) = J(h_i) = 0, (Y_1)'_h(\omega, h_i, 0) = J'(h_i) \neq 0, i = 1, \dots, n,$$

то по теореме о неявной функции существуют положительные числа ε и δ_2 , удовлетворяющие условиям $\varepsilon \leq (1/3) \min\{h_2 - h_1, \dots, h_n - h_{n-1}\}$, $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\delta_2 < \delta_1$, и такие, что при всех $i = 1, \dots, n$, $\mu \in (-\delta, \delta)$ уравнение $Y_1(\omega, h, \mu) = 0$ имеет в интервале $(h_i - \varepsilon, h_i + \varepsilon)$ единственное решение $h = H_i(\mu)$, причем

$$H_i(0) = h_i, H_i(\cdot) \in C^1, \operatorname{sgn}(Y_1)'_h(\omega, H_i(\mu), \mu) = \operatorname{sgn} J'(h_i) = (-1)^i.$$

Для X_μ это означает, что уравнение $y = Y(x, H_i(\mu), \mu)$ задает периодическую траекторию Γ_i , принадлежащую D_0 . Так как

$$d'_h(H_i(\mu), \mu) = \mu(Y_1)'_h(\omega, H_i(\mu), \mu),$$

то $\operatorname{sgn} d'_h(H_i(\mu), \mu) = (-1)^i \operatorname{sgn} \mu$, то есть при $\mu \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ Γ_i - грубый предельный цикл уравнения X_μ , устойчивый (неустойчивый) в случаях, описанных в теореме.

Обозначим Δ объединение отрезков $[\underline{h} + \varepsilon_1, h_1 - \varepsilon]$, $[h_n + \varepsilon, \bar{h} - \varepsilon]$, $[h_i + \varepsilon, h_{i+1} - \varepsilon]$, $i = 1, \dots, n-1$. Вследствие компактности Δ существует такое число $\delta \in (0, \delta_2)$, что $\forall \mu \in (-\delta, \delta)$ решение $Y(x, h, \mu)$, $h \in \Delta$ определено для всех $x \in (-\omega, 2\omega)$. Поскольку к тому же $Y_1(\omega, h, 0) = J(h) \neq 0$ при $h \in \Delta$, а Y_1 непрерывная функция, то δ можно выбрать столь малым, что $\forall \mu \in (-\delta, \delta)$ $Y_1(\omega, h, \mu) \neq 0$ во всех точках $h \in \Delta$. Поэтому периодические траектории уравнения X_μ , $0 < |\mu| < \delta$, проходящие через точки дуги $\{0\} \times [0, \bar{h}]$ совпадают с Γ_i , $i = 1, \dots, n$.

5. Достаточные условия единственности предельного цикла

Пусть $g_0(x) \equiv 0$. Тогда $\underline{h} = 0$, $D = D_0 = \mathbb{S}^1 \times [0, \bar{h}]$, а условия (6) и (7), определяющие семейства $\{X_\mu\}_{|\mu| < \sigma}$ из $F_+(X_0, \sigma)$, принимают вид

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g_1(x, 0, 0) > 0 \quad \text{и} \quad g_1(x, \bar{h}, 0) < 0. \quad (16)$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия (16) и

$$\forall (x, y) \in D \quad (g_1)'_y(x, y, 0) < 0. \quad (17)$$

Тогда существует такое $\delta \in (0, \sigma)$, что при $0 < |\mu| < \delta$ уравнение $X_\mu : \ddot{x} = \mu g_1(x, \dot{x}, \mu)$ имеет в D единственный предельный цикл, устойчивый при $\mu > 0$ и неустойчивый при $\mu < 0$.

Доказательство. Так как $g_0(x) \equiv 0$, то $J(h) = \int_0^\omega g_1(x, h, 0) dx$. Отсюда из (16) и (17) получаем, что

$$J(0) > 0, \quad J(\bar{h}) < 0, \quad J'(h) < 0 \quad \text{при всех } h \in [0, \bar{h}]. \quad (18)$$

Поэтому $J(h)$ имеет единственный простой нуль, и утверждение теоремы 3 следует из теоремы 2.

Замечание 1. Условия (16) – (17) имеют естественную механическую интерпретацию. Правую часть уравнения $\mu g_1(x, \dot{x}, \mu)$ рассматриваем как малый момент сил. Представим ее в виде

$$\mu g_1(x, \dot{x}, \mu) = \mu g_{10}(x, \mu) + \mu k(x, \dot{x}, \mu) \dot{x}, \quad (19)$$

где

$$g_{10}(x, \mu) = g_1(x, 0, \mu), \quad k(x, y, \mu) = \int_0^1 (g_1)'_y(x, ts, \mu) dt.$$

В силу условий (16) и (17) при достаточно малых $\mu > 0$ $\mu g_{10}(x, \mu) > 0$ и $\mu k(x, \dot{x}, \mu) < 0$. Поэтому первое слагаемое в (19) можно трактовать как вращающий момент, а второе как демпфирующий момент.

Замечание 2. Условия (16) в теореме 3 можно заменить менее ограничительными условиями (18). Доказательство в этом случае требует некоторой модификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. М.: Наука, 1981. 568 с.
2. Баутин Н.Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н.Н. Баутин, Е.А. Леонтович. М.: Наука, 1975. 496 с.
3. Барбашин Е.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством / Е.А. Барбашин, В.А. Табуева. М.: Наука, 1969. 299 с.
4. Ройтенберг В.Ш. О рождающихся из бесконечности предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Вестник Моск. гос. област. ун-та. Сер. Физика-Математика. 2017. № 2. С. 6–15. DOI: 10.18384/2310-7351-2017-2-6-15.

5. *Ройтенберг В.Ш.* О предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Науч.-техн. вестник Поволжья. 2017. № 1. С. 25–28.
6. *Ройтенберг В.Ш.* О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности без особых точек // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып.12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 77–91.
7. *Ройтенберг В.Ш.* О рождающихся из бесконечности предельных циклах одного дифференциального уравнения второго порядка на окружности // Науч.-техн. вестник Поволжья. 2017. № 3. С. 28–30. DOI: 10.24153/2079-5920-2017-7-3-28-30.
8. *Ройтенберг В.Ш.* О полиномиальных дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности // Математические методы в технике и технологиях–ММТТ. 2017. Т. 1. С. 3–6.
9. *Хири М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979. 280 с.
10. *Ройтенберг В.Ш.* Предельные циклы дифференциальных уравнений второго порядка на окружности, близких к интегрируемым уравнениям // Математические методы в технике и технологиях–ММТТ. 2018. Т. 1. С. 3–6.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 66.048

А. И. Балунов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: balunovai@ystu.ru

ЭНТРОПИЯ И ИНФОРМАЦИЯ В ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Рассматривается энтропийно-информационная компонента в инженерном образовании химико-технологического профиля. На примере процесса многокомпонентной ректификации приводятся системная постановка и решение задач от синтеза оптимальной структуры системы до ее оптимальной декомпозиции и расчета каждой подсистемы (колонны) в отдельности. При описании процесса используется принцип максимальной энтропии (формализм Джейнса), а при оптимизации – кибернетический закон необходимого разнообразия (закон Эшби).

Ключевые слова: принцип максимальной энтропии, закон необходимого разнообразия, математическое моделирование, оптимизация, ректификация.

A. I. Balunov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: balunovai@ystu.ru

ENTROPY AND INFORMATION IN THE CHEMICAL AND TECHNOLOGICAL EDUCATION

An entropy-information component in engineering education of the chemical and technological profile is considered. On the example of multicomponent rectification process the system statement and the solution of tasks from synthesis of optimum structure of system before her optimum decomposition and calculation of each subsystem (column) separately are given. At the process description the principle of an entropy maximum (Jaynes formalism) is used, and by optimization the cybernetic law of a necessary variety (law Ashby) is used.

Keywords: maximum entropy principle, law of a necessary variety, mathematical modeling, optimization, rectification.

Характерной особенностью фундаментальной и прикладной науки последних десятилетий стало развитие методов и подходов, которые ориентируются не только на классическую вещественно-энергетическую сторону явлений и процессов, но и включают в описание энтропийно-информационную компоненту. В этом проявляется современное системное

понимание фундаментального триединства материального мира: вещества, энергии и информации.

Эта тенденция, естественно, находит отражение в современных планах вузовской подготовки. В них появились разделы и целые новые дисциплины, направленные на обобщение широких методологических установок. К таким дисциплинам, в частности, относится курс системного анализа, вошедший в стандарты образования для студентов, специализирующихся в области химической техники и технологии и других направлений подготовки.

Настоящее сообщение преследует цель познакомить с опытом преподавания темы «Информационные аспекты изучения систем», которая является своеобразным теоретическим ядром системного анализа [1, 2], а также входит в состав ряда других дисциплин химико-технологического профиля.

Область химической техники и технологии является классическим объектом применения основных положений энтропийно-информационного подхода. Сюда относится, прежде всего, энтропийный метод описания процессов, основанный на моделировании по принципу статистического вывода. Непосредственный выход на разделительные системы имеет известный из кибернетики системный закон необходимого разнообразия (закон Эшби). Он позволяет сформулировать фундаментальный критерий оценки организованности системы и применить его для объективной оценки качества разделения. Применение энтропийно-информационного подхода к моделированию и оптимизации процессов химической технологии удобно проиллюстрировать на примере процесса ректификации.

1. Моделирование процесса ректификации

1.1. Принцип максимальной энтропии. Информационный принцип максимальной энтропии был сформулирован американским физиком Э.Т. Джейнсом в 1957 году [3]. Он говорит о том, что система при отсутствии внешних целенаправленных воздействий (в «естественных» условиях) стремится к состоянию, соответствующему максимальному значению энтропии при выполнении наложенных ограничений [4]. В литературе этот принцип известен как формализм Джейнса [5], энтропийный метод моделирования [6], системно-информационный подход [7–12] и используется при решении задач в условиях, когда незнание деталей механизма процесса можно свести к неопределенности статистического типа. Результаты, получаемые на основе принципа максимальной энтропии, следует истолковывать как наиболее правдоподобные, которые можно получить на основе достоверной, но не полной информации.

Хотя принцип максимальной энтропии не имеет формальных доказательств и вводится как очевидный постулат, в последние десятилетия этот подход получил широкое распространение, в том числе при модели-

ровании процесса ректификации [7–10] и других процессов химической технологии [11, 12].

При моделировании многокомпонентной ректификации смесей, близких к идеальным, критерием правдоподобия, согласно используемому формализму, является энтропия Шеннона. В задачах описания процессов химической технологии информационная энтропия оценивает неопределенность обнаружения микрочастиц (молекул) каждого типа (компонента) в рассматриваемой системе. Поскольку в идеальных дискретных смесях вероятность обнаружения частиц определенного типа равна их мольной доле, то энтропию системы можно рассчитать на основе состава смеси [7].

В атермальных (неидеальных) системах вероятность обнаружения частиц того или иного типа определяется не только их концентрациями, а также связана с различием в размерах и форме (объеме) микрочастиц. Поэтому при моделировании ректификации атермальных смесей было предложено максимизировать информационную энтропию сложного опыта, содержащую условную энтропию и условные вероятности [9, 13–15]. В работах [9, 16] раскрывается связь условных вероятностей с относительными размерами микрочастиц и составом многокомпонентной смеси, а также показано, что учет атермальных свойств смеси в общей постановке и решении задачи приводит к зависимостям, в которые входят энтропийные коэффициенты активности в характерной для термодинамики форме. Зависимости для идеальных систем воспроизводятся как частный случай [15].

Введение в экстремальный принцип максимальной энтропии в качестве критерия правдоподобия информационной энтропии сложного опыта является его расширением, по крайней мере, на определенный класс неидеальных систем – атермальные смеси.

В случае описании процесса ректификации непрерывных (нефтяных) смесей критерием максимального правдоподобия является энтропия непрерывного множества [8, 17].

1.2. Распределение компонентов в продуктовых потоках колонны. При поиске закономерностей распределения компонентов между продуктовыми потоками ректификационной колонны учитывается, что связь между ними не может быть описана во всех деталях ввиду сложности и стохастической природы процесса, а любое упрощение процесса может привести к ошибке, величину которой заранее трудно оценить. В такой ситуации закон распределения компонентов находится только как наиболее вероятный, т.е. наименее предвзятый из всех, которые можно было бы принять в условиях объективно существующей неопределенности.

В этой задаче заданными величинами являются: мольный состав исходной смеси, свойства (относительные летучести) компонентов, отборы продуктов и параметр, задающий степень разделения при постановке задачи [7–10]. В качестве ограничений используются уравнения трех типов:

балансовые соотношения для каждого компонента, уравнения нормировки концентраций и уравнение, вводящее свойства компонентов и одновременно фиксирующее степень разделения в колонне [7–10]. Последнее ограничение является характерной особенностью энтропийного метода моделирования.

Таким образом, задача заключается в нахождении таких составов дистиллята и кубового продукта, которые максимизируют информационную энтропию выходных потоков колонны при сформулированных выше ограничениях. Для решения используется метод Лагранжа. При этом один из множителей Лагранжа приобретает физический смысл минимального числа теоретических тарелок для заданного разделения.

Полученному решению отвечает линейно-логарифмическое соотношение, которое для идеальных систем совпадает с известным уравнением Фенске-Андервуда, а для неидеальных является его обобщением [15]. Окончательные зависимости можно привести к форме удобной как для проектного расчета, так и для поверочного. В первом случае задается требование к качеству разделения смеси, а определению подлежат составы продуктовых потоков и условная высота колонны (минимальное число теоретических тарелок). Во втором – задается условная высота колонны (параметр идентификации модели), а определяются составы продуктовых потоков.

1.3. Распределение компонентов в сечениях колонны. По аналогии с предыдущей задачей можно получить зависимости для определения наиболее вероятных составов выходных потоков единичной ступени разделения (тарелки) при фиксированных составах входных потоков. Здесь один из множителей Лагранжа приобретает физический смысл КПД разделительного устройства и характеризует степень разделения выходных потоков тарелки. Для теоретической тарелки КПД равен единице.

Используя полученные соотношения, можно перейти к рекуррентным зависимостям для расчета наиболее вероятных распределений компонентов в смежных сечениях при ступенчато-противоточной схеме движения потоков в колонне. Для идеальных систем при КПД, равном единице, эти зависимости полностью совпадают с общепринятыми зависимостями потарелочного расчета. В общем случае расчет составов в сечениях секций колонны можно проводить как по равновесным (теоретическим) ступеням разделения, так и неравновесным (реальным) ступеням. В последнем случае задается либо КПД тарелки, либо параметр, оценивающий протяженность процесса на ступени разделения [10, 15, 18].

Если неизвестна не только структура потоков внутри ступени разделения, но и сам принцип разбиения колонны на них, секции колонны можно рассматривать как эффективные ступени контакта со сложной гидродинамической структурой потоков. В этом случае параметр, характери-

зующий степень разделения потоков, покидающих рассматриваемый объем колонны, имеет значение больше единицы и выступает в качестве обобщенной координаты процесса или условной высоты секции [10, 15]. Такой метод удобно использовать при расчете насадочных колонн.

В результате предельного перехода от ступенчатого противотока к конечной протяженностью процесса к непрерывному противотоку легко получить зависимости для расчета пленочных колонн [10].

2. Оптимизация процесса ректификации

2.1. Критерий оценки организованности системы. В кибернетике английским биологом У. Эшби был сформулирован закон «необходимого разнообразия»: каждая система, блокирующая разнообразие, должна иметь собственное разнообразие не менее блокируемого [19].

Применительно к разделительной системе эта трактовка приводит к простому принципу – процесс разделения идет с понижением энтропии потоков и для его осуществления требуется некоторая организация процесса, например, наличие специальных систем – ректификационных установок (колонн) определенной сложности. Степень организованности таких систем и предлагается У. Эшби оценивать на основе устраненной ими неупорядоченности или иначе количеством заблокированного разнообразия.

Критерий оценки организованности системы в общем виде записывается как отношение

$$\eta = (H_{\text{вх}} - H_{\text{вых}}) / H_{\text{вх}} = I / I_{\text{max}}, \quad (1)$$

где $H_{\text{вх}}$, $H_{\text{вых}}$ – энтропии потоков на входе и выходе системы соответственно; I – количество информации.

В термодинамической интерпретации для изотермического процесса этот критерий есть отношение термодинамической минимальной работы разделения исходной, близкой к идеальной, смеси на заданные продукты к аналогичной работе разделения на абсолютно чистые продукты.

Поскольку разность в числителе критерия (1) есть количество информации, то такой критерий можно рассматривать так же, как информационный.

Критерий (1) нормирован на единицу. Максимально возможная разделительная способность соответствует полному разделению смеси $H_D = 0$ и $H_W = 0$. Тогда $I_{\text{max}} = H_F$ и $\eta = 1$. Здесь H_F , H_D , H_W – энтропии входного потока (питания) колонны, дистиллята и кубового продукта соответственно. Это отвечает гипотетическому случаю разделения бинарной смеси на чистые продукты или многокомпонентной смеси на две чистые фракции. Наоборот, когда процесс сводится к простому делению смеси на две части одинакового исходного состава, то $H_D + H_W = H_F$ и $\eta = 0$.

С помощью критерия (1) удобно оценивать разделительную способность (разделительную мощность) ректификационной колонны – чем

больше $I = H_F - (H_D + H_W)$, т.е. количество информации, тем выше разделительная способность колонны и тем лучше качество разделения. Таким образом, в задачах оптимизации, связанных с максимальной организованностью системы ($\eta \rightarrow \max$) при фиксированной энтропии входных потоков, реализуется принцип минимальной энтропии ($H_{\text{вых}} \rightarrow \min$).

2.2. Свободные параметры в задачах оптимизации. Критерий оценки организованности системы (1) позволяет сгруппировать основные режимные и конструктивные параметры процесса ректификации в две группы.

Экстенсивные параметры позволяют увеличить степень организованности системы (мощность разделения) за счет дополнительных капитальных затрат (число массообменных тарелок) или дополнительных эксплуатационных затрат (флегмовое число колонны).

Интенсивные параметры позволяют увеличить мощность разделения за счет «внутренней экономии процесса», например, за счет лучшего распределения движущих сил по высоте колонны при практически неизменных значениях «затратных» параметров.

К интенсивным параметрам относятся место ввода питания в колонну, а также значения отборов продуктов. Зависимости критерия (1) от этих параметров носят экстремальный характер. Это означает, что существует такое место ввода питания в колонну, а также значение отбора продукта, которые отвечают максимальной организованности процесса, т.е. соответствуют максимальной мощности разделения.

Используя современную терминологию, можно считать, что положительный эффект здесь достигается за счет дополнительной информации (знание оптимального места ввода питания или оптимального отбора продукта).

2.3. Оптимальный отбор продуктов. Отбор продуктов ректификационной колонны, как было отмечено, относится к интенсивным параметрам и, следовательно, выбор его оптимального значения можно подчинить максимуму информационного критерия (1). Анализ результатов численного эксперимента показал, что при достаточно четком разделении зависимость критерия (1) от отбора продукта имеет несколько локальных экстремумов, число которых в общем случае равно числу возможных вариантов (границ) деления смеси. При этом относительные отборы, соответствующие экстремумам критерия (1), удовлетворяют простому условию, например, для отбора дистиллята [20]

$$\varepsilon_y = D/F \approx \sum_{i=1}^k z_i, \quad (2)$$

где F , D – мольные расходы питания и дистиллята соответственно; ε_y – относительный отбор дистиллята; z_i – мольная концентрация i -го компонента в питании; k – номер наиболее тяжелого компонента из обогащаемых в дистиллят.

Это соотношение иногда называют условием оптимальной статики или условием максимального потенциального отбора продукта, которое выполняется тем строже, чем выше степень разделения в колонне. В гипотетической колонне с неограниченно большим числом тарелок это условие становится единственно возможным при заданной границе деления смеси. С понижением четкости разделения некоторые локальные экстремумы критерия (1) могут исчезать, а оставшиеся смещаются в область отборов, соответствующих половинному делению смеси. Отбор продукта, отвечающий глобальному экстремуму критерия (1), наиболее близок к делению смеси «пополам» [10, 20].

2.4. Оптимальный узел ввода питания. Разделение можно рассматривать как процесс, предназначенный для снижения неупорядоченности исходного потока, измеряемой энтропией. Естественно потребовать, чтобы работа каждой части колонны была подчинена этой цели, т.е. организованность системы была максимальной. В узле ввода вследствие смешения неупорядоченность не только не уменьшается, но даже несколько возрастает. Следовательно, правильно выбранное место ввода питания в колонну должно обеспечить минимально возможное повышение неупорядоченности, что соответствует максимальной степени организованности системы.

В качестве ограничений в этой оптимизационной задаче используются уравнения покомпонентного материального баланса для секций колонны и узлов смешения потоков, а также одно из уравнений нормировки концентраций [7–10].

Решение задачи заключается в нахождении таких составов потоков в сечениях узла ввода питания, которые минимизируют информационную энтропию в узле питания при сформулированных выше ограничениях.

Полученные таким образом зависимости удобны при проектном расчете колонны. Они позволяют получить аналитические выражения для определения минимального флегмового числа при разделении бинарных смесей. В случае многокомпонентных смесей требуется численное решение.

Для действующих колонн место ввода питания является параметром интенсивным и может быть выбрано из условия максимума критерия (1) в результате численного решения задачи оптимизации [21].

2.5. Оптимальная схема разделения. Известно, что если исходная m -компонентная смесь не содержит неразделяемых компонентов (азетропов), то в принципе такую смесь можно разделить в двухсекционной колонне $m-1$ способами, отбирая преимущественно в дистиллят один, два, три и т.д. компонента. В связи с этим возникает возможность выбора оптимальной границы разделения, используя информационный критерий (1). Наиболее наглядно это можно продемонстрировать, принимая концепцию полного разделения, когда в ректификационной колонне нет ни одного

компонента, распределяющегося одновременно между дистиллятом и кубовым продуктом. При допущении о полном разделении критерий (1) с точностью до постоянного множителя $1/H_{\text{ex}}$ совпадает с информационной энтропией для двух исходов опыта (энтропией выбора)

$$\eta = \left[-\varepsilon_y \log \varepsilon_y - (1 - \varepsilon_y) \log(1 - \varepsilon_y) \right] / H_{\text{ex}} . \quad (3)$$

Энтропия выбора максимальна в случае равновероятных событий – $\varepsilon_y = 0,5$. Следовательно, при отсутствии какие-либо специальных ограничений оптимально в колонне делить смесь «пополам» – принцип дихотомии [10]. Поскольку для многокомпонентных смесей не всегда возможно выбрать границу, одновременно удовлетворяющую полному и «половинному» делению, применять принцип дихотомии необходимо с учетом дискретности смеси, максимально приближаясь к дихотомному разделению. При этом, как правило, будет наблюдаться отклонение от теоретически оптимальной границы разделения $\varepsilon_y = 0,5$.

Аналогичные выводы были сделаны при выборе оптимального отбора продукта (оптимальной границы разделения) в результате численного эксперимента, проведенного без использования допущения о полном разделении смеси в колонне [20].

Последовательно применяя принцип дихотомии на каждом шаге разделения (каждой ректификационной колонне), можно получить оптимальную схему разделения прямым синтезом без перебора возможных вариантов. Структура системы в этом случае играет роль своеобразного интенсивного параметра.

Однако не всегда оптимальное разделение на каждой отдельной колонне обеспечивает оптимальность разделения смеси в системе колонн в целом. Поэтому применительно к многоколонной ректификационной установке возможен другой алгоритм выбора оптимальной схемы. Учитывая аддитивные свойства энтропии, в качестве критерия оптимальности схемы разделения можно использовать сумму энтропий выбора отдельных ректификационных колонн [10]. В этом случае требуется перебор всех вариантов схем разделения, однако расчет каждого варианта элементарен, так как в нем участвуют только относительные отборы продуктов (см. (3)). Максимально возможное значение такого критерия соответствует теоретически оптимальной границе разделения смеси в каждой из n колонн системы

$$H_{\text{max}} = -n(0,5 \log 0,5 + 0,5 \log 0,5) = n \log 2 .$$

Практика расчетов показала, что в подавляющем большинстве случаев оба алгоритма выбора приводят к одной и той же оптимальной схеме разделения. Однако в случаях, когда на границе деления смеси находятся компоненты с малыми концентрациями, схема с максимальной энтропией выбора может не совпадать с оптимальной схемой, полученной по принципу дихотомии [10].

Интересно отметить, что схема разделения, в которой выходные потоки на каждой колонне приблизительно одинаковы, является наилучшей и с точки зрения необратимых затрат энергии на разделение [22].

2.6. Оптимальная декомпозиция ректификационной системы. Декомпозиция ректификационной системы на подсистемы (колонны) проводится с целью получения всей необходимой информации для проектирования каждой колонны в отдельности и управления ими. Наиболее просто задача декомпозиции ректификационной системы решается с привлечением концепции четкого разделения. В концепции четкого разделения принимается, что число компонентов, распределяющихся одновременно между дистиллятом и кубовым продуктом, не больше двух, концентрация же остальных в одном из них очень мала, что практически не влияет на точность материального баланса колонны. В таком режиме, т.е. в условиях четкого разделения, работает большинство промышленных ректификационных установок.

Характер решения задачи декомпозиции зависит от числа степеней свободы системы, которое определяется как разность между количеством свободных переменных и независимых уравнений, составленных на основе покомпонентных материальных балансов [10].

Наиболее интересен случай, когда число переменных больше числа уравнений. В общем случае такая задача сводится к минимаксной постановке в том смысле, что критерий оценки разделительной способности системы максимизируется по интенсивным переменным – относительным отборам продуктов, и минимизируется по экстенсивным переменным – незакрепленным концентрациям компонентов в выходных потоках системы. Для четкого разделения значения оптимальных отборов можно принять согласно условию оптимальной статики (2), а решения, соответствующие условию минимума критерия (1), обобщены до разработки специальных мнемонических правил [10]. Последние позволяют сформулировать условия оптимальности и получить решение, не прибегая к процедуре численной оптимизации.

3. Энтропийно-информационный подход в практике расчетов

Рассмотренные принципы реализуются в Ярославском государственном техническом университете в практике преподавания ряда учебных курсов, начиная с девяностых годов прошлого века. Их применение оказалось, в частности, целесообразным при выполнении студентами расчетных (курсовых) работ, предусмотренных учебными планами для ряда направлений подготовки и специальностей химико-технологического профиля.

Для студентов, изучающих проектирование разделительных химико-технологических систем, разработаны специальные расчетные задания, которые включают состав исходной пяти- или шестикомпонентной модельной смеси, требования к качеству ее разделения (заданные concentra-

ции целевых компонентов в выходных потоках системы) и свойства (относительные летучести) компонентов. Число вариантов заданий для каждого типа смеси равно числу возможных вариантов ее разделения на составляющие компоненты, а состав смеси в каждом задании подобран так, что оптимальная схема уникальна. Количество заданных концентраций и их комбинации позволяют дополнительно увеличить число вариантов заданий и их сложность.

В состав заданий входит решение задач трех иерархических уровней: выбор оптимальной схемы разделения, декомпозиция разделительной системы на оптимальные подсистемы и проектирование отдельных ректификационных аппаратов.

Задача первого иерархического уровня заключается в выборе оптимальной схемы разделения смеси на отдельные компоненты. Для этого требуется лишь исходный мольный состав смеси. При выполнении задачи первоначально требуется рассчитать число вариантов схем разделения смеси и изобразить структурные схемы всех вариантов. Для пятикомпонентной смеси возможны 14 вариантов схем ее разделения, для шестикомпонентной – 42 варианта. После этого проводится прямой синтез оптимальной схемы, с использованием принципа дихотомии, а также выбирается оптимальная схема в результате сравнения суммарной энтропии выбора каждого возможного варианта разделения (см. п. 2.5). В последнем случае оптимальная схема имеет максимальную энтропию выбора, что соответствует максимальному значению критерия оценки разделительной способности системы. Во всех разработанных вариантах заданий оба способа выбора приводят к одной и той же оптимальной схеме разделения.

Задача второго иерархического уровня – оптимальная декомпозиция полученной ректификационной системы на оптимальные подсистемы с получением всей необходимой информации для расчета каждой колонны. При решении задачи используется характерная минимаксная постановка задачи (см. п. 2.6).

В результате решения определяются расходы и составы потоков на входе каждой колонны и требования к качеству разделения на тех колоннах, где они не были заданы при постановке задачи.

Задача третьего иерархического уровня – проектный расчет каждой ректификационной колонны. Энтропийный метод моделирования позволяет представить сложную задачу расчета колонны в виде последовательного решения пяти более простых задач.

Первые четыре задачи решаются на основе только термодинамических данных, которые обычно используются при расчете по равновесным ступеням разделения. Последняя, пятая задача связана с переходом от данных термодинамического расчета к реальной высоте колонны. Этот переход осуществляется традиционно с привлечением различных кинетических параметров в зависимости от принятого способа расчета секций колонны.

В состав заданий входит решение только первых четырех задач проточного расчета колонны:

- расчет наиболее вероятных распределений компонентов в продуктовых потоках колонны при использовании информации, полученной в результате решения предыдущей задачи оптимальной декомпозиции;

- расчет минимального и выбор рабочего флегмового режима на основе коэффициента избытка флегмы или оптимального расчета на основе экономического критерия;

- расчет однократного испарения питания и определение составов потоков в оптимальном узле питания;

- расчет распределений компонентов в сечениях колонны и условной высоты секций колонны одним из трех способов (см. п. 1.3) в зависимости от заданной структуры потоков в колонне.

Студенты, специализирующиеся в области автоматизации химико-технологических процессов, выполняют задания другого типа. В них требуется разработать алгоритм оптимального управления ректификационной системой, располагая ее структурой, расходами и составами потоков, режимными параметрами колонн, требованиями к качеству разделения и другими данными. Задания многовариантные и могут содержать как модельные, так и реальные данные, полученные на промышленных объектах. В первом случае необходимые для расчета свойства компонентов (относительные летучести) приведены в задании, а во втором – студенты их находят самостоятельно по известным наименованиям компонентов разделяемой смеси и режимным параметрам колонн.

Задания предусматривают решение четырех взаимосвязанных задач:

- проверка оптимальности заданной структуры системы в результате ее сопоставления с оптимальной, найденной по принципу дихотомии и на основе максимума суммарной энтропии выбора (см. п. 2.5);

- идентификация энтропийных моделей колонн системы по приведенным в задании «экспериментальным» данным (при этом для каждой колонны определению подлежит единственный параметр идентификации – множитель Лагранжа);

- проверка выполнения условия оптимальной статики на колоннах в результате сопоставления относительных отборов продуктов, найденных по условию (2) и отвечающих максимуму информационного критерия (1) (в последнем случае отборы находят численно, используя поверочные энтропийные модели колонн с фиксированными значениями параметров идентификации);

- разработка алгоритма оптимального управления ректификационной системой.

На последней, четвертой задаче остановимся подробнее. Энтропийно-информационный подход позволяет реализовать двухуровневый алгоритм оптимального управления ректификационной системой [23, 24].

На верхнем уровне определяют оптимальные значения незакрепленных концентраций в выходных потоках некоторых колонн и оптимальные отборы продуктов на каждой колонне. При этом свободные концентрации находят в результате решения задачи декомпозиции (см. п. 2.6), а отборы продуктов – либо по условию оптимальной статики (2) в случае его выполнения, либо численно – из условия максимума критерия (1).

На нижнем уровне рассчитанные значения концентраций и отборов, а также значения других параметров стабилизируют локальными автоматическими системами регулирования.

В типовом задании четвертая задача завершается разработкой упрощенной принципиальной схемы автоматизации, реализующей двухуровневый алгоритм управления ректификационной установкой. Расширенный вариант задания может дополнительно включать расчет экономической эффективности предложенной системы оптимального управления [24].

Рассмотренные задачи также входят в состав выпускных квалификационных работ бакалавров и магистрантов, обучающихся по направлениям подготовки химико-технологического профиля. В них студенты на едином энтропийно-информационном принципе (системно) выполняют проектирование многоколонных ректификационных установок и систем оптимального управления этими установками.

Заключение. Введение энтропийно-информационной компоненты в классическое описание процесса ректификации существенно обогащает теорию разделительных систем, придавая ей системный характер с использованием как принципа максимальной, так и принципа минимальной энтропии.

Практика применения этих принципов позволяет продемонстрировать обучающимся органическую связь широких методологических установок энтропийно-информационного подхода с конкретными инженерными задачами в области химической технологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Перегудов Ф.И.* Введение в системный анализ / Ф.И. Перегудов, Ф.П. Тарасенко. М.: ВШ, 1989. 368 с.
2. *Майков В.П.* Введение в системный анализ. М.: МГУИЭ, 2005. 100 с.
3. *Jaynes E.T.* Probability theory: The logic of science. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 727 p.
4. *Фрадков А.Л.* Законы эволюции нестационарных процессов, подчиняющихся принципу максимума энтропии / А.Л. Фрадков, Д.С. Шалымов // Труды СПИИРАН. 2014. Вып. 34. С. 14–32.
5. *Трайбус М.* Термостатика и термодинамика. М.: Энергия, 1970. 504 с.
6. *Вильсон А. Дж.* Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978. 248 с.
7. *Майков В.П.* Расчет ректификационных колонн. Системно-информационный подход / В.П. Майков, А.А. Цветков. М.: МИХМ. 1977. 88 с.

8. Майков В.П. Ректификация непрерывных смесей. Системно-информационный подход / В.П. Майков, К.К. Моругин. М.: МИХМ. 1979. 88 с.
9. Майков В.П. Ректификация атермальных смесей. Системно-информационный подход / В.П. Майков, А.И. Балунов. М.: МИХМ. 1979. 88 с.
10. Балунов А.И. Энтропия и информация в теории ректификации / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2003. Т.46. № 9. С. 54–67.
11. Майков В.П. Энтропийные методы моделирования технологических процессов. М.: МИХМ, 1982. 88 с.
12. Энтропийные методы моделирования в химической технике: Межвуз. сб. / под ред. В.П. Майкова. М.: МИХМ, 1981. 160 с.
13. Балунов А.И. Расширенный принцип максимальной энтропии для описания процесса фазовых превращений в атермальной системе / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2014. Т.57. № 12. С. 93–99.
14. Балунов А.И. Вероятностная модель распределения компонентов атермальных смесей в продуктовых потоках ректификационных систем // Математика и естественные науки. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 170–182.
15. Балунов А.И. Описание процесса многокомпонентной ректификации на основе расширенного принципа максимальной энтропии / А.И. Балунов, В.П. Майков // Известия МГТУ «МАМИ». 2014. Т.3, № 4 (22). С. 31–44.
16. Майков В.П. Условная энтропия в описании свойств атермальности / В.П. Майков, А.И. Балунов // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2004. Т.47, № 8. С. 76–81.
17. Балунов А.И. Термодинамический метод расчета составов продуктов разделения при ректификации непрерывных и дискретно-непрерывных смесей / А.И. Балунов, О.В. Дзюба, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 1996. Т. 39, № 1–2. С. 86–89.
18. Майков В.П. Анализ процесса многокомпонентной ректификации с неравновесными ступенями разделения / В.П. Майков, А.И. Балунов, Н.М. Караваев // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246. №3. С. 674–678.
19. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. URSS, 2017. 430 с.
20. Балунов А.И. Оптимальный отбор продуктов в процессе ректификации. Энтропийно-информационный анализ / А.И. Балунов, В.П. Майков // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2013. Т.56, № 4. С. 97–106.
21. Балунов А.И. Выбор оптимального места ввода питания в колонну при многокомпонентной ректификации / А.И. Балунов, А.Г. Саткунас, Г.Г. Вилков // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ. 2013. № 2. С. 29–33.
22. Цирлин А.М. Оценка затрат энергии и выбор оптимальной последовательности разделения многокомпонентных смесей / А.М. Цирлин, А.И. Балунов, И.А. Сукин // Теорет. основы хим. технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 258–267.
23. Вилков Г.Г. Проектирование и управление разделительными системами // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 183–192.
24. Вилков Г.Г. Оптимизация ректификационных систем // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 204–214.

УДК 51

Н. М. Гулевич, В. О. Кузнецов

Государственный университет морского и речного флота
им. адмирала С.О. Макарова,
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: gulevich.nikolay@gmail.com,
kvo_kuz@mail.ru

О ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЯХ И НЕРАВЕНСТВАХ

Рассматриваются задачи студенческих математических олимпиад, связанные с понятием выпуклой функции.

Ключевые слова: *неравенство, выпуклая функция, эпиграф функции.*

N. M. Gulevich, V. O. Kuznetsov

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Russia, Saint Petersburg, e-mail: kvo_kuz@mail.ru

ON THE CONVEX FUNCTIONS AND INEQUALITIES

We consider the tasks of student mathematical olympiads related to the concept of convex function.

Keywords: *inequality, convex function, epigraph of function.*

Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой (выпуклой вниз)* на промежутке $I \subset D(f) \subset \mathbb{R}$, если для любых $x_1, x_2 \in I$ и любых $t \in [0, 1]$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \quad (1)$$

При $t \in [0, 1]$ точка $x_t = tx_1 + (1-t)x_2$ пробегает отрезок $[x_1, x_2]$, а точка $y_t = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ пробегает хорду AB , где $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$. Поэтому из (1) вытекает, что любая дуга графика выпуклой функции лежит ниже (не выше) хорды, стягивающей эту дугу. Если при всех $x_1 \neq x_2$ и $t \in (0, 1)$ неравенство в (1) является строгим, то функция $f(x)$ называется *строго выпуклой*. Если функция $y = -f(x)$ является выпуклой, то функцию $y = f(x)$ иногда называют *вогнутой (выпуклой вверх)*.

Термин «выпуклая функция» изначально был введен известным датским математиком и инженером Йенсеном (J.L.W.V. Jensen 1859–1925), который для характеристики особенностей поведения функции предложил использовать неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Понятие выпуклой функции естественным образом связано с понятием выпуклости множества. Так в классической монографии [1] по выпуклому анализу выпуклая функция определяется, как функция, у которой *эпиграф*, т.е. множество $\{(x; y) \mid y \geq f(x)\}$, является выпуклой фигурой.

Если определение выпуклой функции дается не через эпиграф, а с помощью неравенства (1), то причину, по которой термин «выпуклый» используется по отношению к функции $y = x^2$, а термин «вогнутый» – по отношению к функции $y = -x^2$, объяснить довольно трудно. Ведь графиком обеих функций является одна и та же кривая – парабола, меняется только *направление* ее выпуклости. Поэтому во многих современных учебниках по высшей математике и математическому анализу [2-7] термин «выпуклый» принято дополнять указанием направления выпуклости.¹⁾

Перечислим некоторые свойства выпуклых функций [11–13].

1. Если функция $f(x)$ является выпуклой на $[x_1, x_2]$ и при $t = t_0 \in (0, 1)$ в (1) имеет место знак равенства, то функция $f(x)$ на $[x_1, x_2]$ совпадает с линейной функцией.
2. Выпуклая на промежутке I функция $f(x)$, отличная от константы, не может достигать наибольшего значения во внутренней точке этого промежутка.
3. Если функция $f(x)$ является выпуклой на промежутке I , то для любых положительных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ выполняется **неравенство Йенсена**

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \dots + \alpha_n f(x_n). \quad (2)$$

Если функция $f(x)$ является строго выпуклой на промежутке I , то равенство в (2) имеет место только в том случае, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

4. Выпуклая на (a, b) функция $f(x)$ непрерывна на (a, b) .
5. Если функция $f(x)$ выпукла и дифференцируема на (a, b) , то при любом $x_0 \in (a, b)$ касательная $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ на (a, b) лежит не выше графика функции $f(x)$, т.е. при любом $x \in (a, b)$

¹⁾ В учебной литературе можно встретить и другую, с точки зрения авторов этой статьи крайне неудачную терминологию (см., например, [8-10]), при которой выпуклую функцию (или ее график) называют вогнутой (вогнутым), а вогнутую функцию (или ее график) – выпуклой (выпуклым).

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Если дополнительно $f(x)$ строго выпукла на (a, b) , то касательная $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ на (a, b) имеет с графиком единственную общую точку $(x_0, f(x_0))$.

6. Если $f''(x) \geq 0$ на (a, b) , то $f(x)$ выпукла на (a, b) ; если $f''(x) > 0$ на (a, b) , то $f(x)$ строго выпукла на (a, b) .

Последнее свойство иногда удобно комбинировать со следующим утверждением.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла) на (a, b) .

Тогда

- 1) из непрерывности $f(x)$ в точке a следует ее выпуклость (строгая выпуклость) на $[a, b)$;
- 2) из непрерывности $f(x)$ в точке b следует ее выпуклость (строгая выпуклость) на $(a, b]$;
- 3) из непрерывности $f(x)$ в точках a и b следует ее выпуклость (строгая выпуклость) на $[a, b]$.

Доказательство. Справедливость теоремы 1 может быть легко установлена с помощью свойства 4. Это свойство, однако, не упоминается в большинстве учебников по высшей математике. Поэтому приведем доказательство, не использующее это свойство.

Докажем первое утверждение теоремы. Для доказательства (нестрогой) выпуклости функции $f(x)$ на $[a, b)$ достаточно проверить, что

$$f(t_0a + (1-t_0)x_2) \leq t_0f(a) + (1-t_0)f(x_2) \quad (3)$$

при любых $x_2 \in (a, b)$ и $t_0 \in (0, 1)$. Положим $x_0 = t_0a + (1-t_0)x_2$,

$t = t(x) = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x} = \frac{t_0(x_2 - a)}{x_2 - x}$. Тогда $t(x) \xrightarrow{x \rightarrow a+0} t_0$, $tx + (1-t)x_2 = x_0$ и $t(x) \in (0, 1)$ при $x \in (a, x_0)$. Поскольку на (a, b) функция выпукла, то $f(x_0) \leq tf(x) + (1-t)f(x_2)$ при любом $x \in (a, x_0)$. Поэтому

$$f(x_0) = f(t_0a + (1-t_0)x_2) \leq \lim_{x \rightarrow a+0} [tf(x) + (1-t)f(x_2)] = t_0f(a) + (1-t_0)f(x_2).$$

Пусть теперь функция $f(x)$ строго выпукла на (a, b) . Предположим, что при $t_0 \in (0, 1)$ в (3) имеет место знак равенства. Тогда, в силу свойства 1, функция $f(x)$ на $[a, x_0]$ совпадает с линейной функцией и, значит, не является строго выпуклой на (a, b) . Утверждения 2 и 3 теоремы 1 доказываются аналогично. ■

Следствие 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f(a) \leq 0$, $f(b) \leq 0$ и $f''(x) > 0$ на (a, b) , то $f(x) < 0$ на (a, b) .

Доказательство. По теореме 1 функция $f(x)$ выпукла на $[a, b]$. Если $x \in (a, b)$, то $x = \alpha a + (1 - \alpha)b$, где $\alpha = \frac{b-x}{b-a} \in (0, 1)$, и

$$f(x) = f(\alpha a + (1 - \alpha)b) < \alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b) \leq 0. \blacksquare$$

Следствие 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f''(x) > 0$ на (a, b) , то $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Доказательство. По теореме 1, п.3 и свойству 6 функция $f(x)$ строго выпукла на $[a, b]$. Поэтому при $x_1 = a$, $x_2 = b$ и $t = \frac{1}{2}$ получаем

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}. \blacksquare$$

Замечание 1. Теорема 1 и следствия 1 и 2 остаются в силе, если $f''(x)$ обращается на (a, b) в нуль в конечном или счетном множестве точек.²⁾

Замечание 2. Утверждения аналогичные теореме 1 и следствиям 1 и 2 справедливы и для вогнутых функций.

Задача 1. Доказать, что $x \sin x < 2$ при $x \in [0, \pi]$.

Решение. Пусть $f(x) = x \sin x$. Тогда $f'(x) = \sin x + x \cos x$, $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$. Так как $f'(x) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2})$, то $f(x)$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$ возрастает и, следовательно, $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} < 2$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Поскольку $f''(x) < 0$ на $(\frac{\pi}{2}, \pi)$, то $f(x)$ – строго выпуклая вверх на $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ функция, и ее график на $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ лежит под касательной к графику в точке $x = \frac{2\pi}{3}$. Поскольку $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} < 0$, то при всех $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)x + \frac{2\pi^2}{9} \leq \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\pi + \frac{2\pi^2}{9} = \frac{\sqrt{3}\pi}{4} + \frac{\pi^2}{18} < \frac{1,8 \cdot 3,2}{4} + \frac{10}{18} = \frac{449}{225} < 2. \end{aligned}$$

²⁾ Смотри замечание 1 в [14].

Задача 2. (Неравенство Коши для средних). Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – положительные числа. Тогда $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, то есть среднее геометрическое положительных чисел не превосходит их среднего арифметического. Причем равенство достигается только, если $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Решение. Поскольку $\exp(x)$ – строго выпуклая на $(-\infty, \infty)$ функция, то в силу неравенства Йенсена

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \exp\left(\frac{\sum_{k=1}^n \ln a_k}{n}\right) \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^n \exp(\ln a_k)}{n}\right) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

и равенство в этом неравенстве имеет место только, если

$$\ln a_1 = \ln a_2 = \dots = \ln a_n \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

Задача 3. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ – непрерывная функция. Доказать, что $\left(\int_0^1 \sqrt[3]{f(x)} dx\right)^3 \leq \int_0^1 f(x) dx$.

Решение. Поскольку $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, то $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx$. Аналогично,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt[3]{f\left(\frac{k}{n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt[3]{f(x)} dx.$$

В силу выпуклости функции $g(x) = x^3$ на $(0, \infty)$

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt[3]{f\left(\frac{k}{n}\right)}\right)^3 = g\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \sqrt[3]{f\left(\frac{k}{n}\right)}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} g\left(\sqrt[3]{f\left(\frac{k}{n}\right)}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\left(\int_0^1 \sqrt[3]{f(x)} dx\right)^3 \leq \int_0^1 f(x) dx.$$

Задача 4 (2th North Countries Universities Mathematical Competition).

Доказать неравенство $\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x} \leq \frac{\pi^3}{16}$.

Решение. Покажем, что функция $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ строго выпукла на $(0, \pi)$. Имеем

$$f''(x) = \left(\frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}\right)' = \frac{x \sin^2 x + 2x \cos^2 x - 2 \sin x \cos x}{\sin^3 x}.$$

Для доказательства строгой выпуклости функции $f(x)$ достаточно проверить, что числитель дроби в полученном выражении для $f''(x)$ на $(0, \pi)$ положителен. Учитывая, что $0 < \sin x < x$ на $(0, \pi)$, для всех $x \in (0, \pi)$ имеем

$$\begin{aligned} x \sin^2 x + 2x \cos^2 x - 2 \sin x \cos x &\geq x(1 - \cos^2 x) + 2x \cos^2 x - 2 \sin x |\cos x| = \\ &= x(1 + \cos^2 x) - 2 \sin x |\cos x| \geq x(1 + \cos^2 x) - 2x |\cos x| = x(1 - |\cos x|)^2 > 0. \end{aligned}$$

Поскольку подынтегральная функция выпукла на $(0, \pi)$, то искомым интеграл не превосходит суммы площадей двух трапеций с вершинами в точках $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{6}, 0)$, $(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6}))$, $(0, 1)$ и $(\frac{\pi}{6}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$, $(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6}))$. Таким образом,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin x} \leq \frac{1 + \pi/3}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi/3 + \pi/2}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi^2}{6}.$$

Поскольку $4 + 8\pi < 4 + 8 \cdot 3,15 = 29,2 < 29,5788 = 3 \cdot (3,14)^2 < 3\pi^2$, то

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{(4 + 8\pi)\pi}{48} < \frac{3\pi^3}{48} = \frac{\pi^3}{16}.$$

Задача 5. Доказать, что $\sin x < \frac{x(\pi-x)}{2}$ при любых $x \in (0, \pi)$.

Решение. Положим $f(x) = \sin x - \frac{x(\pi-x)}{2}$. Поскольку $f(0) = f(\pi) = 0$, $f''(x) = 1 - \sin x > 0$ при всех $x \in (0, \pi)$, за исключением точки $x = \frac{\pi}{2}$, где $f''(\frac{\pi}{2}) = 0$, то в силу следствия 1 (см. также замечание 1), $f(x) = \sin x - \frac{x(\pi-x)}{2} < 0$ на $(0, \pi)$.

Задача 6. Доказать, что $\ln \frac{x+y}{2\sqrt{xy}} \geq \frac{x+y}{4xy} - \frac{1}{x+y}$ при $x > 1$, $y > 1$.

Решение. Преобразуем неравенство

$$\ln \frac{x+y}{2} - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln y \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \right) - \frac{1}{2(x+y)} \Leftrightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

где $f(t) = \ln t + \frac{1}{2t}$. Поскольку $f''(t) = \frac{1-t}{t^3} < 0$ при $t > 1$, то последнее неравенство является следствием выпуклости вверх функции $f(t)$ на $(1, \infty)$.

Задача 7. Пусть $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывная выпуклая вниз функция. Доказать, что $\frac{2}{5} \int_0^{1/3} f(t) dt + \frac{3}{10} \int_0^{2/3} f(t) dt \geq \frac{5}{8} \int_0^{8/15} f(t) dt$.

Решение. Пусть $g(x) = \frac{2}{5} \int_0^{x/3} f(t) dt + \frac{3}{10} \int_0^{2x/3} f(t) dt - \frac{5}{8} \int_0^{8x/15} f(t) dt$. Тогда $g(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, дифференцируема на $(0, 1)$, и, в силу выпуклости функции $f(x)$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} f\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{15} f\left(\frac{8x}{15}\right) = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{5} f\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{5} f\left(\frac{2x}{3}\right) - f\left(\frac{8x}{15}\right) \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \left[f\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{x}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2x}{3}\right) - f\left(\frac{8x}{15}\right) \right] = \frac{1}{3} \left[f\left(\frac{8x}{15}\right) - f\left(\frac{8x}{15}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

при любом $x \in (0, 1)$. Поэтому $g(x)$ не убывает на $[0, 1]$ и, следовательно,

$$g(1) = \frac{2}{5} \int_0^{1/3} f(t) dt + \frac{3}{10} \int_0^{2/3} f(t) dt - \frac{5}{8} \int_0^{8/15} f(t) dt \geq g(0) = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

8. Доказать, что $x \cos x < 0,6$ при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
9. Доказать, что $x^2 \operatorname{ctg} x < \frac{3}{4}$ при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
10. Доказать, что $2 \arcsin x + \arctg x < \frac{5\pi}{4} x$ при $x \in (0, 1)$.
11. Доказать, что $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$ при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
12. Доказать, что $(x+y)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + y^\alpha)$ при любых $\alpha \geq 1, x, y \geq 0$.
13. Доказать, что $(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha \leq 2^\alpha x$ при любых $\alpha, x \in [0, 1]$.
14. Доказать, что при любом $x \in [0, 1]$

$$(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha \geq 2^\alpha x, \text{ если } \alpha \in [1, 2];$$

$$(1+x)^\alpha - (1-x)^\alpha \leq 2^\alpha x, \text{ если } \alpha \in [2, +\infty).$$

15. Доказать, что $x^x + y^y \geq \sqrt{2}$ при $x, y > 0$ и $x + y = 1$.
16. Доказать, что $x^y + y^x \leq \sqrt{2}$ при $x, y \geq 0$ и $x + y = 1$.

17. Доказать, что $(x \sin y + y \sin x) \sin \frac{x+y}{2} \geq (x+y) \sin x \sin y$ при любых $x, y \in [0, \pi]$.

18. Доказать, что $x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$ при любых $x, y > 0$.

19. Доказать, что $\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ для любой положительной непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$.

20. Доказать, что $\int_a^b x f(x) dx \leq \frac{a+2b}{3} \int_a^b f(x) dx$, если $f(x) \geq 0$, $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
2. *Камынин Л.И.* Курс математического анализа. Т.1. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 2001. 432 с.
3. *Зорич В.А.* Математический анализ. Ч. I. 2-е изд. М.: ФАЗИС, 1997. 554 с.
4. *Архипов Г.И.* Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. 5-е изд. М.: 2004. 640 с.
5. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. Изд. второе. К.: Факт, 2004. 560 с.
6. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч.1. М.: МФТИ, 2000. 359 с.
7. *Тер-Крикоров А.М.* Курс математического анализа / А.М. Тер-Крикоров, М.И. Шабунин. 3-е изд. М.: 2001. 672 с.
8. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Для втузов. Т.1. Изд.12. 1978. 456 с.
9. *Бермант А.Ф.* Курс математического анализа. Часть I (12-е изд.). М.: Физматгиз, 1959. 466 с.
10. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. 5-е изд. М.: Высш. шк., 1997. Ч.1. 304 с.
11. *Одинец В. П.* Основы выпуклого анализа / В.П.Одинец, В.А. Шлензак. М.-Ижевск: ИИКИ, 2011. 520 с.
12. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. Элементарная теория. М.: Наука, 1965. 424 с.
13. *Райков Д.А.* Одномерный математический анализ. М.: Высш. шк., 1982. 415 с.
14. *Гулевич Н.М.* Использование производных при доказательстве неравенств / Н.М. Гулевич, В.О. Кузнецов // Математика и ее приложения. Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 4. СПб.: ГУМРФ, 2013. С. 65–74.

УДК 519.725.2

А. Н. Жаров¹, Д. Г. Митюшов², И. Г. Жарова¹

¹Ярославский государственный технический университет,
Россия, г. Ярославль, *e-mail*: zharovan@ystu.ru, zharovaig@ystu.ru
²Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны,
Россия, г. Ярославль

О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕМЫ: СИНТЕЗ КОДЕРОВ ЦИКЛИЧЕСКИХ КОДОВ

Рассмотрены особенности изложения темы: синтез кодеров циклических кодов. Указывается на необходимость поэтапного рассмотрения данной темы.

Ключевые слова: коды, циклические коды, помехоустойчивое кодирование, кодеры циклических кодов.

A. N. Zharov¹, D. G. Mityushov², I. G. Zharova¹

¹Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, *e-mail*: zharovan@ystu.ru
²Yaroslavl Higher Military School of Air Defense
Russia, Yaroslavl

ABOUT THE TEACHING OF THE THEME: THE SYNTHESIS OF ENCODERS OF CYCLIC CODES

It is examined the features of studying of the topic: the synthesis of encoders of cyclic codes. We point out the need for a step-by-step consideration of the topic.

Keywords: codes, cyclic codes, noise-immune coding, encoders of cyclic codes.

Циклические коды – это коды, способные обнаруживать и исправлять ошибки, возникающие при передаче информации по каналам связи. Данные коды и их свойства описаны в [1]. Широкое распространение данные коды получили потому, что они легко реализуются с помощью технических устройств - кодеров.

Рассмотрим процесс формирования технического устройства, способного формировать частное и остаток от деления полинома циклического кода $H(x)$ на образующий полином

$$P_k(x) = g_0 + g_1 \cdot x + \dots + g_{k-1} \cdot x^{k-1} + g_k \cdot x^k. \quad (1)$$

Сформулируем правила построения формирователя:

1. Число ячеек памяти равно степени образующего полинома k .
2. Число сумматоров на единицу меньше веса кодирующей комбинации образующего полинома.

3. Место установки сумматоров определяется видом образующего полинома.

Так для образующего полинома (1) формирователь может иметь вид, представленный на рис. 1.

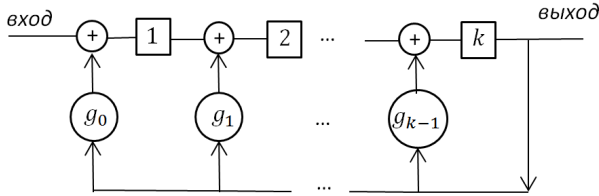


Рис. 1. Формирователь остатка и частного циклического кода для образующего полинома (1)

В данном формирователе обратные связи присутствуют, если $g_i = 1$. Если же $g_i = 0$, то обратные связи отсутствуют.

В качестве примера изобразим формирователь для образующего полинома $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^4$. Данный полином четвертой степени. Вес комбинации 11101 равен 4. Согласно правилам построения формирователя, имеем: число ячеек памяти $k = 4$, число сумматоров равно $4 - 1 = 3$.

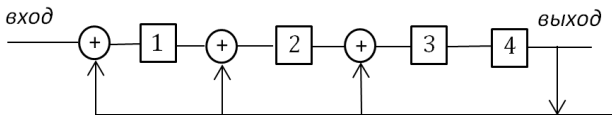


Рис. 2. Формирователь остатка и частного циклического кода для образующего полинома $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^4$

С помощью формирователя, изображенного на рис. 2, найдем частное и остаток от деления многочлена циклического кода

$$H(x) = 1 + x + x^2 + x^5 + x^6$$

на образующий полином $P_4(x) = 1 + x + x^2 + x^4$. Решение оформим в табл. 1.

Таблица 1. Ход работы формирователя

Номер такта	Вход	1	2	3	4	Выход
	1110011					
1	111001	1				
2	11100	1	1			
3	1110	0	1	1		
4	111	0	0	1	1	
5	11	0	1	1	1	1
6	1	0	1	0	1	11
7		0	1	0	0	111

В таблице 1 сформированы остаток 0100 и частное 111.

$$\begin{array}{r}
 x^6 + x^5 + x^2 + x + 1 \quad | \quad x^4 + x^2 + x + 1 \\
 \underline{x^6 + x^4 + x^3 + x^2} \\
 x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 \\
 \underline{x^5 + x^3 + x^2 + x} \\
 x^4 + x^2 + 1 \\
 \underline{x^4 + x^2 + x + 1} \\
 x
 \end{array}$$

Найдем остаток и частное с помощью деления уголком.

Таким образом, частное $1 + x + x^2$ соответствует коду 111, а остаток x – коду 0100. Следовательно, формирователь позволяет правильно сформировать остаток и частное от деления многочленов.

Перейдем к вопросу построения кодера циклического кода, т.е. устройства, которое преобразует информационное сообщение в циклический код. Данное устройство должно содержать два регистра: регистр задержки и регистр сдвига (регистр обратной связи), формирующий остаток деления многочленов. Регистр сдвига должен быть организован по принципу обратной связи подобно формирователю, представленному на рис. 1. Так, например, если образующий полином имеет вид

$$P(x) = 1 + x + x^3$$

тогда кодер циклического кода может быть синтезирован в виде, представленном на рис. 3.

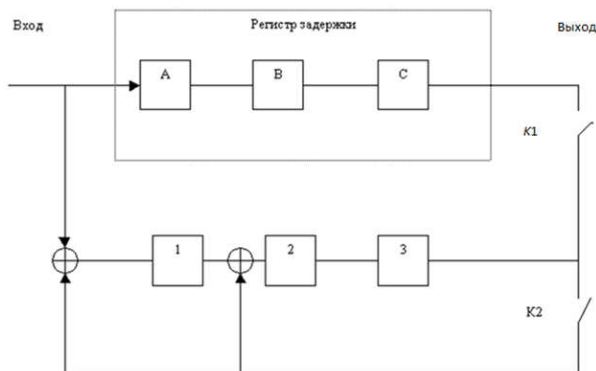


Рис. 3. Кодер циклического кода с образующим полиномом $P_3(x) = 1 + x + x^3$

Опишем принцип работы кодера циклического кода:

В исходном состоянии ключ K1 замкнут, а ключ K2 – разомкнут. Исходная кодовая комбинация, вводится последовательно, начиная со старшего разряда, в оба регистра: регистр задержки и регистр сдвига. Че-

рез 3 такта старший разряд оказывается в последних ячейках обоих регистров. После этого ключ К1 размыкается, а ключ К2 замыкается, создавая в регистре сдвига цепь обратной связи. С 4-го такта начинается деление, в результате которого формируется остаток. Через 7 тактов деление заканчивается, и в ячейках регистра сдвига будет записан остаток от деления многочленов. После этого ключ К1 вновь замыкается, а ключ К2 размыкается, и контрольные разряды поступают на выход устройства.

Рассмотрим следующую задачу: с помощью кодера сформированного на рис. 3. Получить циклический код (7,4) для информационного сообщения 0111.

Решение с использованием полиномов. Полином информационного сообщения $G(x) = x + x^2 + x^3$ умножим на x^3

$$G(x) \cdot x^3 = x^4 + x^5 + x^6.$$

Найдем остаток от деления $G(x) \cdot x^3$ на образующий полином $P_3(x)$

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 + x^4 \quad | \quad x^3 + x + 1 \\ \underline{x^6 + x^4 + x^3} \\ x^5 + x^3 \\ \underline{x^5 + x^3 + x^2} \\ x^2 \end{array}$$

Циклический код будет иметь вид

$$F(x) = G(x) \cdot x^3 + R(x) = x^2 + x^4 + x^5 + x^6 \rightarrow 0010111.$$

Рассмотрим решение данной задачи с использованием кодера, изображенного на рис. 3. Решение запишем в табл. 2.

Таблица 2. Ход формирования циклического кода с помощью кодера, изображенного на рис. 3

Номер такта	Вход	A	B	C	1	2	3	Выход
Ключ К1 замкнут, ключ К2 разомкнут								
	0000111							
1	000011	1			1			
2	00001	1	1		1	1		
3	0000	1	1	1	1	1	1	
Ключ К1 разомкнут, ключ К2 замкнут								
4	000	0	1	1	1	0	1	1
5	00	0	0	1	1	0	0	11
6	0	0	0	0	0	1	0	111
7		0	0	0	0	0	1	0111
Ключ К1 замкнут, ключ К2 разомкнут								
8-9-10								0010111

Таким образом, кодер циклического кода позволяет получить циклический код вида 0010111, такой же, как получен с помощью многочленов.

Принцип изложения материала, представленный выше, предполагает поэтапное знакомство слушателей сначала с формирователем частного и остатка при делении многочленов, построенного по принципу обратной связи. После чего излагается материал посвященный синтезу кодеров циклического кода, в которых содержится формирователь остатка от деления многочленов и регистр задержки. Такое поэтапное изложение материала позволяет более успешно освоить тему: «Синтез кодеров циклических кодов» слушателям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жаров А.Н.* О преподавании темы: циклические коды / А.Н. Жаров, С.В. Овчинников, А.Н. Хожайнов // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2017. С.135-143.

УДК 303.4

М. Г. Ивакина, С. А. Бельман

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина,
Россия, г. Рязань, e-mail: marinaiv6214@gmail.com, s.belman@rsu.edu.ru

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ КОЛЛЕКТИВА

Рассматривается зависимость деятельности коллектива от эмоционального фона. Построена математическая модель оптимального режима деятельности социальной группы.

Ключевые слова: математическая модель, эмоциональный фон, оптимальный режим.

M. G. Ivakina, S. A. Belman

S. A. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: marinaiv6214@gmail.com, s.belman@rsu.edu.ru

CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE OPTIMAL MODE OF THE ACTIVITY OF A COLLECTIVE

The paper examines a dependence of the activity of the collective on the emotional background. The mathematical model of the optimal mode of social group activity is constructed.

Keywords: mathematical model, emotional background, optimal mode.

Ярким примером коллектива является учебное сообщество. В деятельности школьников большую роль играет создание эмоционального фона на уроке. Так как эмоциональное воздействие - один из самых сильных и действенных путей привлечения интереса. Эффективность учебного процесса зависит от психологической атмосферы на уроке. Исследование таких ученых, как О.К. Тихомиров, Ю.Э. Виноградов, П.К. Анохин, показали, что когнитивный процесс невозможен без эмоциональной активации [1]. Л.С. Выготский уделял особое внимание связи между эмоциями и мышлением, утверждая, что необходимо понять движущие силы мотивов, потребностей и интересов, которые направляют движение мысли в ту или иную сторону [2].

Каждый учитель по-своему задает темп урока, активизирует деятельность обучающихся. Для обеспечения высокого качества обучения и сохранения благоприятного психологического климата участников образовательного процесса необходимы оптимальные условия их совместной деятельности. Кроме внедрения различных форм, приемов и методов с эффективным разделением труда, необходимо поддержание определенного эмоционального фона.

Для выявления особенностей изменения эмоционального фона класса, его влияния на успеваемость ребят был проведен эксперимент. Ведущая роль в его организации отводилась педагогу, который задавал темп деятельности учеников. Посредством формирования определенного темпа деятельности оказывалось влияние на изменение эмоционального фона класса. Чтобы установить уровень оптимального режима деятельности обучающихся, в эксперименте участвовали три класса одной параллели. Уроки проводились по одной и той же теме, посвященной введению понятия десятичных дробей по следующему плану:

1. Организационный момент.
2. Актуализация опорных знаний (устный опрос по предыдущему уроку).
3. Введение нового материала (эвристическая беседа).
4. Закрепление материала (выполнение упражнения).
5. Первичный контроль знаний (самостоятельная работа).
6. Подведение итогов урока, домашнее задание.

Составленные конспекты уроков отличались между собой насыщенностью методическими элементами. При этом быстрому темпу проведения урока сопутствовали многочисленная смена деятельности детей, развернутая историческая справка по теме урока, игровые моменты. Медленный темп урока, напротив, сохранял однообразную деятельность учащихся, минимум исторической информации.

Закрепление материала проводилось через выполнение упражнений. Пример №1. Запишите в виде десятичной дроби:

1) $\frac{6}{10}$; 2) $3\frac{12}{100}$; 3) $15\frac{27}{1000}$.

Пример №2. Запишите в виде обыкновенной дроби или смешанного числа: 1)5,7; 2)9,015; 3)11,63.

В конце урока была проведена самостоятельная работа, одинаковая во всех трех классах (табл. 1).

Таблица 1. Проверочная работа

Фамилия Имя		Класс	Вариант 2
№1. Запишите в виде десятичной дроби:			
1) $\frac{3}{10} =$	2) $7\frac{81}{100} =$	3) $9\frac{5}{100} =$	
№2. Запишите в виде обыкновенной дроби или смешанного числа:			
1) 16,8 =	2) 15,03 =	3) 19,759 =	4) 0,01 =

Предполагаемый результат исследования состоял в том, что эффективность усвоения нового материала зависит от эмоционального фона, который в свою очередь пропорционален темпу урока. Например, если урок «перенасытит» учебным материалом или же, наоборот, не добрать, то ученики не смогут в полной мере усвоить тему. Максимальное восприятие материала будет обеспечено при рациональном ведении урока. Перенасыщенный учебным материалом урок приведет ученика в состояние аффекта, то есть поначалу он, возможно, будет успевать за учителем, но вскоре из-за такого темпа ученик устанет, будет находиться в нервном состоянии, от чего будет плохо восприниматься преподаваемый ему материал, и соответственно, урок не принесет ему возможной пользы. Если же темп урока будет, наоборот, слишком медленный, то ученик очень скоро заскучает, ему станет неинтересно на таком уроке и из-за этого учебный материал также восприниматься в полной мере не будет.

Для получения объективных статистических данных было сделано видео проводимых уроков, которое изучали независимые наблюдатели (студенты педагогических направлений). Время урока t (40 минут) было разбито на непересекающиеся полуинтервалы по две минуты. На каждом полуинтервале оценивалось эмоциональное состояние I каждого учащегося по шкале Хаббарда [3]. Для преодоления субъективности оценок наблюдателей, за истинное значение бралось среднее арифметическое всех оценок данных выбранному объекту (ученику).

В результате проведения эксперимента получены статистические данные, которые изображены на рисунках (рис. 1-3). В каждом случае построены математические модели в виде линий тренда, отражающие изменения эмоционального состояния социальной группы [4].

Данное исследование показало, что повышенная активность на уроке не влечет значительного увеличения эмоционального фона класса. Частые эмоциональные всплески не дают возможности более глубоко изучить преподаваемый материал. Медленный темп учебной деятельности влечет понижение эмоционального фона с течением времени, а следовательно, падает результативность учебной деятельности. Наивысший эмоциональный фон класса наблюдался при умеренном темпе проведения урока.

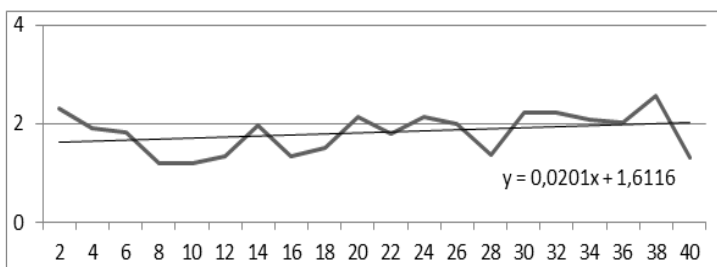


Рис. 1. Быстрый темп урока

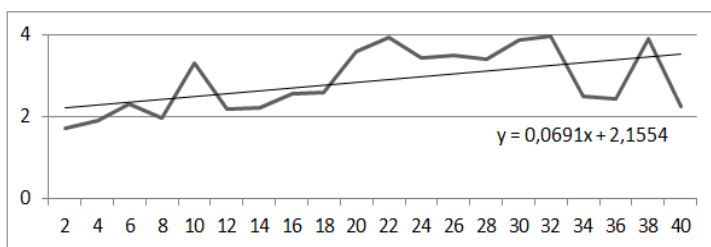


Рис. 2. Средний темп

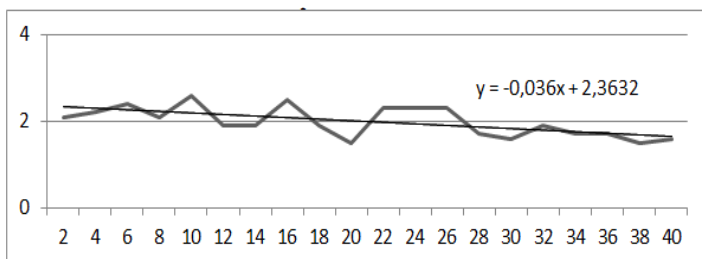


Рис. 3. Медленный темп

Анализ результатов самостоятельной работы показал, какой темп урока лучше сказался на усвоении темы. В табл. 2 представлены результаты этой работы.

Таблица 2. Результаты самостоятельной работы

	«Быстрый темп урока»	«Средний темп урока»	«Медленный темп урока»
Процент выполненных заданий	93, 14%	94, 44%	90, 48%

Таким образом, положительный эмоциональный фон урока способствует лучшему усвоению материала. В ходе исследования выявлен оптимальный темп урока (умеренный), который позволяет рационально направлять образовательную деятельность детей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изард, К.Э.* Психология эмоций. СПб. : Питер, 2000. 464 с.
2. *Ильин, Е.И.* Эмоции и чувства. 2-е изд. СПб. : Питер, 2008. 783 с.
3. <https://econet.ru/articles/175649-shkala-emotsionalnyh-tonov-habbarda>
4. *Юмагулов М. Г.* Введение в теорию динамических систем: Учебное пособие. М.: Лань, 2015. 272 с.

УДК 517.31

Н. И. Иванова, М. В. Куликова

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, e-mail: natalii803@mail.ru

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Статья посвящена применению теоремы о «двух милиционерах» к нахождению пределов числовых последовательностей на занятиях студенческого математического кружка.

Ключевые слова: *числовая последовательность, предел последовательности, теорема о «двух милиционерах», математический кружок, студенческие математические олимпиады.*

N. I. Ivanova, M. V. Kulikova

Yaroslavl Higher Military School of Air Defense
Russia, Yaroslavl, e-mail: natalii803@mail.ru

ABOUT THE CALCULATION OF LIMITS FOR NUMERICAL SEQUENCES

This article is devoted to the application of the "two policemen" theorem to finding limits of numerical sequences in classes of a student's mathematical circle.

Keywords: numerical sequence, limit of a sequence, "two policemen" theorem, student mathematical Olympiads.

Одной из самых интересных тем для занятий студенческого математического кружка всегда была теория пределов. Нами уже рассмотрены некоторые методы нахождения предела числовой последовательности, в частности, нахождение пределов с помощью интегральных сумм [1] и с помощью теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности [2]. Рассмотрим еще один метод, который часто помогает при решении олимпиадных задач.

Теорема о пределе промежуточной последовательности (теорема о двух милиционерах) [3]. Пусть для последовательности x_n можно найти две последовательности u_n и v_n , имеющие общий предел A при $n \rightarrow \infty$, и такие, что начиная с некоторого $n = n_0$, выполняются неравенства $u_n \leq x_n \leq v_n$. Тогда и последовательность x_n имеет предел равный A .

Эти две последовательности, u_n и v_n называют на математическом жаргоне, соответственно, «младший милиционер» и «старший милиционер». Они обе стремятся к одному пределу, к которому вынужденно стремиться и расположенная между ними x_n .

Теорема о «двух милиционерах» позволяет заменить задачу о вычислении предела последовательности x_n на задачу вычисления двух более простых пределов последовательностей u_n и v_n . Трудность в ее применении обычно заключается именно в построении последовательностей u_n и v_n , которые имеют одинаковые пределы. Как правило, они строятся путем упрощения исходной последовательности x_n .

Покажем на конкретных примерах, как эта теорема применяется при вычислении пределов числовых последовательностей.

Пример 1. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{\sqrt{n^4+k}}$.

Решение. Имеем последовательность

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{\sqrt{n^4+k}} = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n-1}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n}}.$$

«Младшего милиционера» u_n получим, заменяя в знаменателе каждого слагаемого из x_n числа $1, 2, \dots, n-1$ на n , тем самым увеличивая знаменатель и уменьшая дробь

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{\sqrt{n^4+n}} = \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} (n+(n-1)+\dots+2+1) = \frac{1}{\sqrt{n^4+n}} \cdot \frac{(n+1)n}{2}.$$

«Старший милиционер» v_n получится, если все знаменатели заменить на наименьший $-\sqrt{n^4+1}$; тем самым, x_n ($n > 1$) увеличится:

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} (n+(n-1)+\dots+2+1) = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} \cdot \frac{(n+1)n}{2}.$$

Таким образом, при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства: $u_n \leq x_n \leq v_n$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{1}{2}$, то по теореме о «двух милиционерах» $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Пример 2. При каждом $x > 0$ найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[x + \frac{1}{x} \right] + \left[x^2 + \frac{1}{x^2} \right] + \dots + \left[x^n + \frac{1}{x^n} \right]}{x^n + \frac{1}{x^n}},$$

где $[y]$ – целая часть числа y [5].

Решение. Обозначим $a_n(x)$ – выражение, стоящее под знаком предела. Так как $y - 1 < [y] \leq y$, то

$$x + \frac{1}{x} - 1 < \left[x + \frac{1}{x} \right] \leq x + \frac{1}{x}, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 < \left[x^2 + \frac{1}{x^2} \right] \leq x^2 + \frac{1}{x^2}, \dots,$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} - 1 < \left[x^n + \frac{1}{x^n} \right] \leq x^n + \frac{1}{x^n}.$$

При $x > 0$ получаем

$$\frac{x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + \dots + x^n + \frac{1}{x^n} - n}{x^n + \frac{1}{x^n}} < a_n(x) \leq \frac{x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + \dots + x^n + \frac{1}{x^n}}{x^n + \frac{1}{x^n}},$$

а после преобразований

$$\frac{x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x + 1 - nx^n}{x^{2n} + 1} < a_n(x) \leq \frac{x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x + 1}{x^{2n} + 1}.$$

Пределы дробей, стоящих в левой и правой части этого неравенства, существуют и равны 1; следовательно, и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x) \equiv 1$.

Пример 3. Доказать, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ и вычислить его, если последовательность x_n задана рекуррентным соотношением

$$x_{n+2} = \frac{1}{4}x_{n+1} + x_n^4 \text{ при } n \in \mathbb{N}, \quad x_1 = x_2 = \frac{1}{4} \quad [5].$$

Решение. Докажем методом математической индукции, что при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено двойное неравенство

$$0 \leq x_n \leq \frac{1}{2^n}. \quad (1)$$

Проверим базу индукции. Неравенство (1) выполнено при $n = 1$ и $n = 2$.

Пусть неравенство (1) выполнено при $n = k$ и $n = k + 1$. Имеем $0 \leq x_k \leq \frac{1}{2^k}$ и $0 \leq x_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. Докажем тогда, что неравенство (1) выполняется и при $n = k + 2$. Неравенство $x_{k+2} = 0,25x_{k+1} + x_k^4 > 0$ следует из условия $x_k > 0$ и $x_{k+1} > 0$. Второе неравенство получается из оценок

$$x_{k+2} = \frac{1}{4}x_{k+1} + x_k^4 \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{4k+4}} = \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{4k+4}} < \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Итак, «младший милиционер»: $u_n = 0$, «старший милиционер»:

$v_n = \frac{1}{2^n}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, то и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Пример 4. Вычислить предел последовательности

$$x_n = n \int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. При $x \geq 1$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}.$$

Проинтегрировав эти неравенства в пределах от n до $2n$, получим

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \leq \frac{1}{2n}.$$

Таким образом, для последовательности x_n

$$u_n = n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} \text{ — «младший милиционер»,}$$

$$v_n = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \text{ — «старший милиционер».}$$

$$\text{Так как } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{1}{2}, \text{ то и } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

Для лучшей подготовки студентов и курсантов к математическим олимпиадам различных уровней можно применить методику парных задач [6], она поможет отработать конкретные приемы и методы нахождения пределов числовых последовательностей. Для окончательного закрепления материала предлагаем задачи для самостоятельного решения, среди которых есть те, которые решаются с помощью теоремы о «двух милиционерах», и те, которые решаются другими, уже знакомыми нам методами [1, 2]. Кроме того, можно предложить студентам при изучении конкретной темы или метода самим придумать задачу, решаемую изученным методом. Иногда такие задачи стимулируют воображение не хуже, чем трудно решаемые, и могут стать источником новых идей и методов, и даже тем для занятий математического кружка [7].

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить предел последовательности $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 - k + 1}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Вычислить предел последовательности $x_n = \frac{n^2 + (-1)^n n \sin n}{n^2 + (-1)^n n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{[k+x]}{n^3 + [kx]}$, $x > 0$.

4. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4+1} + \frac{2}{n^4+2} + \dots + \frac{n}{n^4+n} \right)$.

5. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}}{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} + e^{\frac{1}{2\sqrt{n}}} + \dots + e^{\frac{1}{n\sqrt{n}}}}$.

6. Последовательность (a_n) задана формулами: $a_1 = 1$, $a_n = \int_0^1 \sin(a_{n-1}x^2) dx$.

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ существует и найти его.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Н.И.* Некоторые приложения интегральных сумм / Н.И. Иванова, М.В. Куликова // Стратегии и тренды развития науки в современных условиях: Материалы III Междунар. науч.-практ. конф. Уфа: НИЦ «Ника», 2017. С. 157-159.
2. *Иванова Н.И.* Применение теоремы Вейерштрасса к решению задач / Н.И. Иванова, М.В. Куликова // Современные тенденции развития науки и производства: Сб. материалов VI Междунар. науч.-практ. конф. Кемерово: ЗСНЦ, 2017. С. 46-49.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. Т. 1. 616 с.
4. *Попов И.Ю.* Задачи студенческих математических олимпиад. СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. 216 с.
5. *Ройтенберг В.Ш.* Задачи студенческих математических олимпиад ЯГТУ / В.Ш. Ройтенберг, Ю.К. Оленикова, Л.А. Сидорова. 2-е изд., испр. и доп. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. 151 с.
6. *Иванова Н.И.* Методика парных задач при подготовке студентов и курсантов к математическим олимпиадам // Сб. ст. III Междунар. науч.-практ. конф. «Актуальные вопросы педагогики и психологии». Пенза: МЦНС, Наука и просвещение, 2017. С. 114-117.
7. *Иванова Н.И.* О некоторых аспектах внеаудиторной работы со студентами // Наука и образование. Тенденции и перспективы: сб. Междунар. науч.-практ. конф. Уфа, РИО ИЦИПТ, 2014. С. 33-37.

УДК 517.9+378

В. Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРЕПОДАВАНИИ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
СТУДЕНТАМ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ**

Обсуждаются следующие вопросы: формы записи дифференциального уравнения, понятие решения и способы его задания, типы уравнений, подлежащих изучению.

Ключевые слова: курс математики для вузов, дифференциальное уравнение.

V. Sh. Roitenberg

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: vroitenberg@mail.ru

**SOME REMARKS ON THE TEACHING
OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
FOR STUDENTS OF TECHNICAL UNIVERSITIES**

The following questions are discussed: forms of recording a differential equation, the concept of a solution and methods of its assignment, the types of equations that are subject to study.

Keywords: course of mathematics for technical universities, differential equation.

Мы ограничимся обсуждением вопросов, относящимся к дифференциальным уравнениям первого порядка. В курсе математики в ЯГТУ, где работает автор, на эти темы можно отвести примерно 6 часов лекций и 6–7 часов практических занятий, то есть весьма мало. Однако на этих занятиях у студентов вырабатываются общие представления о дифференциальных уравнениях, и потому они имеют большое значение.

1. Примеры уравнений. На лекции можно привести два уравнения первого порядка: 1) уравнение для экспоненты: $\dot{x} = kx$ – уравнение размножения ($k > 0$), радиоактивный распад ($k < 0$), $x(0) = x_0$; 2) уравнение остывания тела: $\dot{T} = -k(T - T_{\text{ext}})$, где $T_{\text{ext}} = \text{const}$ или $T_{\text{ext}} = T_{\text{ext}}(t)$ – ω -периодическая функция (например, $\omega = 24$ часа), $T(0) = T_0$.

Эти примеры показывают, что если нас интересует зависимость некоторой величины x , характеризующей физической, химической, экономической, технологической и т.д. процесс от времени: $x = x(t)$, то часто проще сначала получить зависимость «скорости» изменения величины \dot{x} от самой величины и момента времени, то есть дифференциальное уравнения вида $\dot{x} = f(t, x)$, а потом *решить* это уравнение, то есть найти зависимость $x = x(t)$. Из примеров также хорошо понятна естественность задания начального условия $x(t_0) = x_0$.

В примере 1 можно сразу догадаться о том, что решение задачи $x = x_0 e^{kt}$. Стоит подчеркнуть, что, решив дифференциальное уравнение, мы нашли не реальную зависимость объема популяции или количества радиоактивного вещества от времени, а приближенную зависимость в рамках выбранной модели.

2. Формы записи уравнений первого порядка. Какие буквы использовать в лекциях для обозначения переменных в ДУ 1-го порядка, традиционные x и y или более логично следующие из примеров t и x ? Несмотря на определенные удобства первого варианта (например, традиция такой записи в учебниках, привычная геометрическая интерпретация), второй вариант хорош тем, что он позволяет регулярно напоминать студентам о динамической интерпретации ДУ и начальных условий. Частичный компромисс – использовать буквы t и y .

Более важное замечание состоит в том, что теорема существования и единственности (о ней разговор ниже) формулируется для уравнений в *нормальном виде (нормальной форме)*:

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1)$$

Студенты должны осознать, что начальное условие однозначно определяет решение только для уравнения в нормальной форме; интегрируемые типы уравнений и соответственно методы их решения следует различать также по нормальной форме. Таким образом, надо приучать записывать все ДУ 1-го порядка в этой форме. Уравнения, не разрешимые относительно производной, не стоит рассматривать в технических вузах.

3. Что такое решение. Что значит решить ДУ 1-го порядка. Теорема существования и единственности. *Решение* ДУ (1) – любая функция $x = x(t)$, $t \in J$, где J – *промежуток*, такая, что $\dot{x}(t) \equiv f(t, x(t))$ для всех $t \in J$. При трактовке t как времени требование, чтобы t менялось непрерывно, то есть пробегало промежуток, представляется очевидным. Конечно, если мы хотим, чтобы это было осознано, следует хотя бы в некоторых полученных решениях проанализировать, где меняется аргумент.

Что означает «задача»: решить заданное уравнение? Формально, подразумевается, что следует найти все его решения. Поскольку образцом ДУ, для которого этот вопрос был уже решен, является простейшее ДУ $\dot{x} = f(t)$, $t \in J$, все решения которого имеют вид

$$x = \int f(t)dt = \int_{t_0}^t f(t)dt + C, \text{ где } t_0 \in J, \text{ а } C - \text{ произвольная постоянная,}$$

то обычно вводится понятие *общего решения* $x = x(t, C)$, объект довольно нечетко определенный, и подразумевается, что надо это общее решение найти. Более естественно, проанализировав примеры, заметить, что искомая величина (скажем x) однозначно определяется ее значением x_0 в начальный момент t_0 и потому следует искать ее зависимость $x = x(t, t_0, x_0)$ от времени t и начальных данных t_0, x_0 . Таким образом в теории приходим к формулировке *задачи Коши* и *общего решения в форме Коши*. На практике этот подход приводит к тому, что при решении уравнений с разделяющимися переменными, к которым по традиционной методике сводятся все остальные интегрируемые уравнения, следует писать определенные интегралы с переменными верхними пределами вместо неопределенных интегралов. Преимущество такого подхода в том, что, решая прикладную задачу, мы получаем зависимость искомой величины от времени и начальных данных, имеющих прикладной смысл, а не от ни о чем не говорящей «произвольной постоянной». К сожалению, запись общего решения в форме Коши часто выглядит громоздко. Возможно поэтому в задачах задачу Коши предлагают решать при удобно подобранных конкретных начальных данных.

Поскольку доказывать теорему существования и единственности на лекциях никак не получается, то разумно привести ее не в локальном ва-

рианте, удобном для доказательства, а в нелокальном, более удобном для понимания и использования. Дадим возможный вариант ее формулировки [1].

Теорема. Пусть правая часть $f(t, x)$ уравнения (1) определена, непрерывна и имеет непрерывную производную $f'_x(t, x)$ в точках открытого множества $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для любых начальных данных t_0, x_0 при которых $(t_0, x_0) \in D$, существует единственное решение $x = x(t)$, $t \in J$, уравнения (1) такое, что 1) оно удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$, 2) для любого другого решения $x = \tilde{x}(t)$, $t \in \tilde{J}$, удовлетворяющего начальному условию $\tilde{x}(t_0) = x_0$ с теми же начальными данными, его область определения $\tilde{J} \subset J$, а $\tilde{x}(t) = x(t)$ для всех $t \in \tilde{J}$.

Решение $x = x(t)$, $t \in J$, о котором говорится в теореме, называется *максимальным* или *непродолжаемым решением* ДУ, определяемым начальными данными t_0, x_0 . Поскольку оно однозначно определяется заданием начальных данных, то его можно записать как функцию $x = x(t, t_0, x_0)$ от t , t_0 и x_0 и назвать *общим решением в форме Коши*. Часто можно фиксировать t_0 , считая, например, $t_0 = 0$, и полагая $x_0 = C$ – произвольным, получить, что все решения образуют семейство, зависящее от одного параметра C .

К сожалению, многие студенты полагают, что *решить дифференциальное уравнение* означает выполнить некоторую процедуру и получить «выражение без производных и интегралов». Поэтому на практическом занятии большинство примеров должно быть подобрано так, чтобы можно было явно выразить решение через аргумент. При этом полезно решить пример, где в это выражение входит «неберущийся» определенный интеграл с переменным верхним пределом. В тех примерах, где явное выражение для решения получить нельзя, надо честно признать, что вместо дифференциального уравнения и начальных условий для искомой функции, мы получили «конечное» уравнение для этой функции, но явного выражения для нее нет.

4. Основные типы интегрируемых уравнений. По-видимому, обязательным для изучения следует считать только уравнения с разделяющимися переменными и линейные. Они часто встречаются в простых приложениях. Остальные уравнения изучать можно, чтобы было поле для полезных упражнений: различать типы уравнений (возможно, умение различать объекты по признакам их характеризующим, является самостоятельной ценностью, которую стоит тренировать), делать замену переменных, в процессе решения вычислять несложные интегралы, решать логарифмические уравнения.

рифмические, показательные, тригонометрические уравнения. При желании на это можно найти время за счет возможно менее необходимых тем курса математики.

5. Автономные уравнения. С формальной точки зрения автономные уравнения $\dot{x} = f(x)$ являются весьма частным случаем уравнений с разделяющимися переменными. Однако они заслуживают самостоятельного рассмотрения. Во-первых, они естественны с «физической» точки зрения и часто встречаются в приложениях. Во-вторых, для них можно провести полный анализ решений, в том числе и качественный. В частности, понять роль стационарных решений, которые при формальном разделении переменных обычно теряются, так как не входят в «общее» решение (общий интеграл). На практическом занятии можно, например, рассмотреть уравнение $m\dot{v} = g - kv$, для скорости $v(t)$ падающего тела в среде с сопротивлением и показать, что скорость «стремится» стабилизироваться, его обобщения [2], для которых нет явной формулы для решения, а также логистическое уравнение $\dot{x} = (a - x)x$.

6. О приближенных численных и аналитических методах. Даже в очень кратком курсе дифференциальных уравнений нельзя не упомянуть об этих методах, их достоинствах и, естественно, недостатках. Метод Эйлера прост и геометрически нагляден, универсален, но точность его мала, и как любой численный метод он требует числовых начальных данных, а искомая функция задается только в конечном числе точек. Разложение по формуле Тейлора (в ряд Тейлора, если к этому моменту студенты с ним знакомы) дает достаточно универсальный метод приближенного аналитического решения задачи Коши, даже с буквенными начальными данными. Разложение решения ДУ в ряд традиционно рассматривается в разделе рядов и для уравнений 2-го порядка, чему, конечно, есть естественные объяснения. Однако разумно дать некоторое представление о приближенных аналитических методах в начале курса ДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 331 с.
2. *Ройтенберг В.Ш.* Об изложении в курсе математики некоторых задач, приводящих к автономным дифференциальным уравнениям первого порядка // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 8. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2012. С. 56-59.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.832:519.81:330.4

А. С. Ананьина, В. В. Абрамов

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: sofya.ananyina@yandex.ru,
v.abramov@rsu.edu.ru

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ

Найдены коэффициентные условия разрешимости игры двух лиц с нулевой суммой при условии, что функция выигрыша квадратичная и вогнутая по обоим переменным.

Ключевые слова: модель, теория игр, принятие решений.

A. S. Ananina, V. V. Abramov

S.A. Yesenin Ryazan State University,
Russia, Ryazan, e-mail: sofya.ananyina@yandex.ru,
v.abramov@rsu.edu.ru

THE CONDITIONS OF SOLVABILITY OF THE ZERO-SUM GAME ON THE UNIT SQUARE

The coefficient conditions for the solvability of the game of two zero-sum persons are found, provided that the win function is quadratic and concave in both variables.

Keywords: model, game theory, decision-making.

Рассмотрим одношаговую антагонистическую игру, в которой:

- 1) $x \in [0, 1]$ – чистая стратегия игрока 1, рассчитывающего на наибольший безрисковый выигрыш;
- 2) $y \in [0, 1]$ – чистая стратегия игрока 2, рассчитывающего на наименьший проигрыш;
- 3) функция выигрыша игрока 1 за счет игрока 2

$$f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cxy + ax + by + c. \quad (1)$$

Игровая модель такого вида применялась в работах [1-3] для оптимизации прибыли при сбыте одного продукта с позиции крайней осторожности. При этом для решения игры учитывалось дополнительное условие продуктивности.

Определение. Антагонистическая игра двух лиц с функцией выигрыша $f(x, y)$ продуктивна для игрока 1, если: 1) $x_0 > 0$ – оптимальная чистая стратегия игрока 1; 2) $v_0 = f(x_0, y_0) > 0$ – оптимальная чистая цена игры.

В работе [4] рассматривалась неантагонистическая игра с квадратичными функциями выигрыша. В работе [5] были найдены неравенства для коэффициентов функции выигрыша (1), соблюдение которых гарантирует существование продуктивного решения игры. Предполагалось $A < 0, B > 0$, что является достаточным условием однозначной разрешимости игры [6]. В данной работе рассмотрим случай, когда это условие не выполняется. Получим коэффициентные условия продуктивности игры с функцией выигрыша (1).

По экономическому смыслу игры уточним условия для коэффициентов функции (1). Если в конфликте нет участников, то естественно предполагать, что выигрыш игрока 1 нулевой. Поэтому будем предполагать, что $c = 0$. Если в конфликте не участвует игрок 1, то его выигрыш $f(0, y) = (By + b)y \leq 0, y \in [0, 1]$. Значит, $b \leq 0$. Если игрок 2 не участвует в конфликте, то выигрыш игрока 1 в продуктивном случае равен $f(x, 0) = x(Ax + a) > 0, x \in [0, 1]$. Это возможно при $a > 0$. Итак, будем предполагать, что в равенстве (1):

$$a > 0, b \leq 0, c = 0. \quad (2)$$

Допустим, что имеют место неравенства

$$A < 0, B < 0. \quad (3)$$

Пусть $\beta = \min_{[0, 1]} V(y)$ – верхняя цена игры с функцией выигрыша $f(x, y)$, $V(y) = f(x(y), y)$ – функция гарантированного проигрыша игрока 2, $x(y) = \arg \max_{[0, 1]} f(x, y)$ – функция наилучшего ответа игрока 1; $\alpha = \max_{[0, 1]} W(x) > 0$ – нижняя цена игры; $W(x) = f(x, y(x))$ – функция гарантированного выигрыша игрока 1; $y(x) = \arg \min_{[0, 1]} f(x, y)$ – функция наилучшего ответа игрока 2.

Для решения игры применим следующий критерий.

Теорема [6]. Антагонистическая игра двух лиц имеет решение тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$.

Чтобы вычислить α рассмотрим функцию (1) – (3) как функцию от y с параметром x

$$f(x, y) = By^2 + (C + b)y + (Ax^2 + ax). \quad (4)$$

Так как $B < 0$, то функция (4) строго вогнутая по y на отрезке $[0, 1]$.

При этом $W(x) = \begin{cases} Ax^2 + ax, & B + C + b \geq 0, \\ Ax^2 + ax + B + C + b, & B + C + b < 0. \end{cases}$ По условиям (2), (3)

имеем $-a/(2A) = \arg \max_{(-\infty, +\infty)} W(x) > 0$. Значит, по критерию Вальда

для игрока 1 оптимальна стратегия $x_\alpha = \min\{-a/(2A), 1\}$. Нижняя цена равна

$$\alpha = W(x_\alpha) = \begin{cases} f(-a/(2A), 0) = -a^2/(4A), & -a/(2A) < 1, \bar{B} \geq 0, \\ f(1, 0) = A + a, & -a/(2A) \geq 1, \bar{B} \geq 0, \\ f(-a/(2A), 1) = -a^2/(4A) + \bar{B}, & -a/(2A) < 1, \bar{B} < 0, \\ f(1, 1) = A + a + \bar{B}, & -a/(2A) \geq 1, \bar{B} < 0, \end{cases}$$

где $\bar{B} = B + C + b$. Необходимым условием продуктивности игры для игрока 1 служит оценка $\alpha > 0$.

Чтобы вычислить верхнюю цену игры, рассмотрим функцию (1)–(3) как функцию от x с параметром y :

$$f(x, y) = Ax^2 + (Cy + a)x + (By^2 + by). \quad (5)$$

Выводы о разрешимости и о продуктивности игры зависят от соблюдения включения $\bar{x}(y) = \arg \max_{(-\infty, +\infty)} f(x, y) = -\frac{Cy + a}{2A} \in (0, 1]$.

При полной включенности ($\bar{x}(y) \in (0, 1], y \in [0, 1]$) имеем

$$\begin{cases} C + a > 0, \\ C + a + 2A \leq 0, \\ a + 2A \leq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Тогда для игрока 2 функция гарантированного проигрыша

$$V(y) = f(\bar{x}(y), y) = \left(B - \frac{C^2}{4A}\right)y^2 + \left(b - \frac{Ca}{2A}\right)y - \frac{a^2}{4A}.$$

Предположим $B - C^2/(4A) \leq 0$. Тогда с учетом (6) верхняя цена игры

$$\beta = \min\{V(0), V(1)\} = \begin{cases} f(-a/(2A), 0) = -a^2/(4A), & D \geq 0, \\ f(-(C+a)/(2A), 1) = -a^2/(4A) + D, & D < 0, \end{cases}$$

где $D = \left(B - \frac{C^2}{4A}\right) + \left(b - \frac{Ca}{2A}\right)$.

Допустим, $B - C^2/(4A) > 0$. Тогда $V(y)$ строго выпуклая на всей числовой прямой, $\bar{y} = \arg \min_{(-\infty, +\infty)} V(y) = -\frac{2Ab - Ca}{4AB - C^2}$. По критерию Вальда

для игрока 2 оптимальна чистая стратегия $y_\beta = \begin{cases} 0, & \bar{y} \leq 0, \\ \bar{y}, & 0 < \bar{y} < 1, \text{ верхняя цена} \\ 1, & \bar{y} \geq 1, \end{cases}$

игры

$$\beta = V(y_\beta) = \begin{cases} f\left(-\frac{a}{2A}, 0\right) = -\frac{a^2}{4A}, & \bar{y} \leq 0, \\ f(\bar{x}(\bar{y}), \bar{y}) = -\frac{a^2}{4A} - \frac{(2Ab - Ca)^2}{4A(4AB - C^2)}, & 0 < \bar{y} < 1, \\ f\left(-\frac{C+a}{2A}, 1\right) = -\frac{a^2}{4A} + D, & \bar{y} \geq 1. \end{cases}$$

Применим сформулированную выше теорему. При $0 < \bar{y} < 1$ функция выигрыша не имеет седловой точки. Если $y_0 = 1$ – оптимальная чистая стратегия игрока 2, то для разрешимости игры необходимо выполнение равенства $C = 0$. При этом $\bar{y} = -\frac{b}{2B} \leq 0$ в силу неравенств (2), (3). То есть $y_0 = 1$ не может быть оптимальной стратегией игрока 2.

Вывод 1. Пусть имеют место оценки (6). Если выполняются условия

$$\begin{cases} B + C + b \geq 0, \\ \left(B - \frac{C^2}{4A}\right) + \left(b - \frac{Ca}{2A}\right) \geq 0, \text{ или} \\ 4AB - C^2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} B + C + b \geq 0, \\ 2Ab - Ca \leq 0, \\ 4AB - C^2 < 0, \end{cases}$$

то игра с функцией выигрыша (1) – (3) продуктивна для игрока 1, $x_0 = -a/(2A)$ – оптимальная чистая стратегия игрока; $y_0 = 0$ – опти-

мальная чистая стратегия игрока 2; $v_0 = -\frac{a^2}{4A}$ – оптимальная чистая цена игры.

Рассмотрим случаи неключенности $\bar{x}(y)$ в отрезок $[0, 1]$. Если $\begin{cases} \bar{x}(y) < 0, \\ 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$ то при $y = 0$ получаем $a < 0$, что противоречит условию (2).

Этот случай нами исключается. Если $\begin{cases} \bar{x}(y) > 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$, то есть

$$\begin{cases} 2A + a > 0, \\ C + 2A + a > 0, \end{cases} \quad (7)$$

то функция (5) строго возрастает по $x \in [0, 1]$. Следовательно, функция наилучшего ответа игрока 1 $x(y) = 1$. Так как $B < 0$, то функция $V(y) = f(1, y) = By^2 + (C + b)y + (A + a)$ строго вогнутая по $y \in [0, 1]$. Тогда

$$\beta = \min\{V(0), V(1)\} = \begin{cases} A + a, & \bar{B} \geq 0, \\ A + a + (B + C + b), & \bar{B} < 0. \end{cases}$$

Вывод 2. Пусть имеют место оценки (7). Если $B + C + b \geq 0$ ($B + C + b < 0$), то игра с функцией выигрыша (1)–(3) имеет решение: $x_0 = 1, y_0 = 0$ ($y_0 = 1$) – оптимальные чистые стратегии игроков, $v_0 = A + a + (1 - y_0)(B + C + b)$ – оптимальная чистая цена игры.

При неполной включенности $\bar{x}(y)$ в отрезок $[0, 1]$ должно выполняться условие $C \neq 0$. Рассмотрим частный случай, когда $C > 0$, то есть функция $\bar{x}(y)$ возрастает. Допустим, $\bar{x}(0) < 1$ и $y^* = -\frac{a + 2A}{C} < 1$, то есть справедливы оценки

$$\begin{cases} 2A + a < 0, \\ C + 2A + a > 0. \end{cases} \quad (8)$$

При этом для игрока 1 функция наилучшего ответа имеет вид

$$x(y) = \begin{cases} -(Cy + a)/(2A), & y \in [0, y^*], \\ 1, & x \in [y^*, 1], \end{cases}$$

Тогда для игрока 2 имеем

$$V(y) = \begin{cases} V_1(y) = (B - \frac{C^2}{4A})y^2 + (b - \frac{2Ca}{4A})y - \frac{a^2}{4A}, & y \in [0, y^*], \\ V_2(y) = By^2 + (b + C)y + (A + a), & y \in [y^*, 1]. \end{cases}$$

Для разрешимости игры требуется условие $\beta = \min\{V_1(0), V_2(1)\}$. При этом условии $\arg \min_{[0, y^*]} V_1(y) = 0$ и $\arg \min_{[y^*, 1]} V_2(y) = 1$. Следовательно,

имеют место оценки

$$\begin{cases} 4AB - C^2 \leq 0, & 2Ab - Ca > 0, \\ 4AB - C^2 > 0, & \frac{2Ab - Ca}{4AB - C^2} \leq \frac{a + 2A}{C}, & \frac{b + C}{B} \geq \frac{a + 2A}{C}. \end{cases} \quad (9)$$

При условии (9) решение игры определяется по нижней цене игры. Аналогично рассматриваются другие случаи частичного включения $\bar{x}(y)$ в отрезок $[0, 1]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Титова Е.В.* Модель оценки объема предложения / Е.В. Титова, В.В. Абрамов // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 271–276.
2. *Титова Е.В.* Игровая модель оценки объема сбыта одного продукта / Е.В. Титова, В.В. Абрамов // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2018: сб. тр. III междунар. науч.-техн. и науч.-метод. конф. / под общ. ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2018. Т. 7. С. 5–8.
3. *Титова Е.В.* Игровая модель принятия решения об оптимизации потока объемов сбыта одного продукта / Е.В. Титова, В.В. Абрамов // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы IV науч.-практ. всерос. конф. (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. Тольятти: Издатель А.В. Качалин, 2018.
4. *Никольский М.С.* О вычислении точек равновесия по Нэшу для игры двух игроков на квадрате с квадратичными функциями выигрыша / М.С. Никольский, М. Абубакар // Математическое образование. 2014. № 1 (69). С. 36–41.
5. *Ананьина С.А.* Коэффициентные условия существования седловой точки квадратичной функции на единичном квадрате / С.А. Ананьина, В.В. Абрамов // Прикладная математика и информатика: современные исследования в области естественных и технических наук: материалы IV науч.-практ. всерос. конф. (школы-семинара) молодых ученых: 23-25 апреля 2018 г. Тольятти: Издатель А.В. Качалин, 2018.
6. *Оуэн Г.* Теория игр. М.: Мир, 1971.

УДК 624.072

А. Л. Балушкин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *balushkinal@ystu.ru*

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ БИМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ДЛЯ РАСЧЕТА АРМИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Основные положения бимоментной теории стержней сплошного сечения В.З. Власова адаптируются для определения относительных деформаций в изгибаемых армированных элементах с дискретными трещинами. Для определения деформаций, вызванных депланацией поперечного сечения стержня, использована параболическая зависимость.

Ключевые слова: дискретная трещина, гипотеза плоских сечений, депланация поперечного сечения, бимомент.

A. L. Balushkin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: balushkinal@ystu.ru*

FEATURES OF THE APPLICATION OF THE BIMOMENT THEORY FOR THE CALCULATION OF REINFORCED RODS

Basic concepts of the bimoment theory of bars of solid cross section of V. Z. Vlasov are adapted to determine the relative deformations of concrete in bend reinforced concrete elements with discrete cracks. To determine the deformations caused by the deformation of the cross-section of the rod, a parabolic dependence was used.

Keywords: discrete cracks, plane section hypothesis, cross section deplanation, bimoment.

При силовом деформировании изгибаемых армированных элементов в сечениях с нормальными трещинами гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) нарушается [6]. Характер распределения относительных деформаций по высоте сечения становится существенно нелинейным, что подтверждается результатами, представленными в работах [1, 2, 7] и других исследователей.

Существуют различные предложения по учету депланаций поперечного сечения, развивающихся в процессе деформирования стержней. При этом большинство предложений относится к проблемам изучения работы тонкостенных металлических стержней в условиях изгиба и кручения, что нашло отражение в частности в публикациях [4, 5].

Данная работа развивает проблему учета дополнительных относительных деформаций при деформации поперечного сечения изгибаемых армированных элементов. Разрешающие соотношения получены с использованием основных положений бимоментной теории стержней В.З. Власова [3], рассмотревшего также проблему деформации стержней сплошного сечения, для случая сложного поперечного изгиба.

Для описания процесса деформирования изгибаемого армированного элемента, используется модель составного стержня. Рассматриваемый элемент состоит из 3-х ветвей. Средняя часть – представляет армируемый материал, например бетон или конструкционную керамику. В верхней зоне бетонной ветви располагается арматурная ветвь, моделирующая сжатую арматуру A_{s1} , в нижней части располагается арматурная ветвь, характеризующая растянутую арматуру A_{s2} . Арматурные ветви могут быть выполнены из металла или с использованием волокнистого композита. Все ветви объединены между собой абсолютно жесткими поперечными связями и податливыми связями сдвига.

Поскольку дискретная гибкая арматура A_{s1} и A_{s2} локализована по периферийным зонам поперечного сечения, после образования нормальных трещин, сопровождающихся возникновением взаимных сдвигов между бетоном и арматурными ветвями g_{s1} , g_{s2} , в сечении бетонной ветви возникают относительные деформации деформации бетона $\varepsilon_b^d(x, z)$.

В процессе деформирования армированного элемента учитываем упругую работу бетона. Полные относительные деформации бетона $\varepsilon_b(x, z)$ определяются как линейные $\varepsilon_b^l(x, z)$ и деформации, вызванные деформацией бетона $\varepsilon_b^d(x, z)$ (рис. 1)

$$\varepsilon_b(x, z) = \varepsilon_b^l(x, z) + \varepsilon_b^d(x, z). \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon_b^l(x, z) = \rho^{-1}(x)z$ – линейные относительные деформации бетона, определяемые с использованием гипотезы плоских сечений, где ρ^{-1} – кривизна; z – расстояние от нейтральной оси (X) до рассматриваемого волокна;

$\varepsilon_b^d(x, z) = \theta_d(x)\varphi(z)$ – деформации, вызванные деформацией бетона, где $\theta_d(x)$ – мера деформации; $\varphi(z^*)$ – характеристика деформации. Принимается в зависимости от типа поперечного сечения стержня и характера рассматриваемой задачи с учетом требований ортогональности к функциям $f(z^*) = 1, f(z^*) = z^*$

$$\left. \begin{aligned} \int_F \varphi dF &= 0 \\ \int_F \varphi z^* dF &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где z^* – расстояние от центра тяжести сечения до рассматриваемого волокна (от оси Y^*).

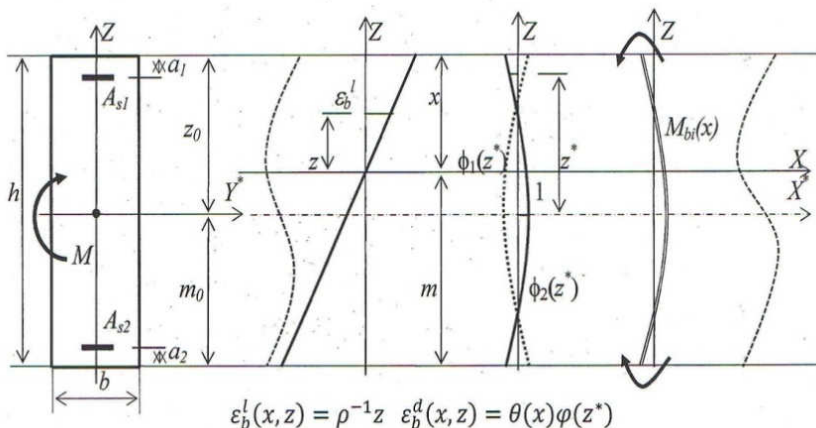


Рис. 1. Поперечное сечение элемента. Схемы для определения относительных деформаций бетонной ветви с учетом возникновения бимоента M_{bi} . Параметр $\varphi(z^*)$ для усилий в арматурных ветвях: $\varphi_1(z^*)$ для N_{s1} , $\varphi_2(z^*)$ для N_{s2}

Для определения деформаций бетона для параметра $\varphi(z^*)$ принимается параболическая зависимость. Учитывая, что поперечное сечение рассматриваемого стержня имеет только одну ось симметрии

$$\varphi(z^*) = c \left\{ 1 - H(z^*, 0) \left(1 + \frac{h}{z_0} \right) \left(\frac{z^*}{z_0} \right)^2 - H(-z^*, 0) \left(1 + \frac{h}{m_0} \right) \left(\frac{z^*}{m_0} \right)^2 \right\}. \quad (3)$$

Здесь $c \ll 0$ – масштабный множитель. Определяет характер эпюры $\varepsilon_b^d(x, z)$ по высоте сечения в зависимости от типа деформации бетона (для сечения с трещиной и для участка стержня между смежными трещинами), а также от знака продольного усилия в бетонной ветви. Для упрощения получаемых результатов принимаем, что $\varphi(0) = 1$, тогда $c = 1$; m_0, z_0 – координаты центра тяжести сечения бетонной ветви; $H(z^*, 0)$ – функция Хевисайда.

Выражение (3) для характеристики деформации $\varphi(z^*)$ определяет самоуравновешенную эпюру дополнительных деформаций при деформации бетона $\varepsilon_b^d(x, z)$ и соответствующих дополнительных напряжений в бетоне $\sigma_b^d(x, z) = E_b \varepsilon_b^d(x, z)$, вызванных деформацией поперечного сечения. Это означает, что развитие деформаций в бетоне не изменяет значение момента внутренних сил в сечении элемента.

Система уравнений статических условий равновесия в сечении с трещиной при действии в сечении бетонной ветви изгибающего момента: M_{sb} и продольной силы: N_{sb} дополняется уравнением учитывающим возникновение бимоента $M_{bi}(x)$:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma_b dF &= N_{sb} \\ \int_F \sigma_b z dF &= M_{sb} \\ \int_F \sigma_b \varphi dF &= M_{bi} \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где σ_b – нормальное напряжение в бетонной ветви; z – расстояние от рассматриваемого волокна до нейтральной оси.

Первое уравнение системы (4) позволяет определить положение нейтральной оси – высоту растянутой зоны m . Второе уравнение используется для оценки жесткости бетонной ветви при изгибе $B = B(\rho^{-1})$. Третье уравнение системы с учетом условий ортогональности, преобразуется в выражение

$$M_{bi}(x) = A_\varphi \theta_d(x), \quad (5)$$

которое используется для определения депланационной составляющей деформаций бетона

$$\varepsilon_b^d(x, z^*) = \theta_d(x) \varphi(z^*) = \frac{M_{bi}(x)}{A_\varphi} \varphi(z^*), \quad (6)$$

где A_φ – обобщенная продольная жесткость, связанная с продольными деформациями при депланации сечения.

$$A_\varphi = \int_{-m_0}^{z_0} E_b \varphi^2(z^*) b(z^*) dz^*. \quad (7)$$

При упругой работе бетона и отсутствии трещин $A_\varphi = A_{\varphi e}$. Для сечения прямоугольной формы размерами $b \times h = F$, $A_e = FE_b e_d$, для прямоугольного сечения $e_d = 1$

$$\frac{A_\varphi e}{A_e} = \left(5 \frac{m_0 z_0}{h h} \right)^{-1}. \quad (8)$$

Для определения бимоента $M_{bi}(x)$ используется уравнение, полученное в [3] вариационным методом, при котором рассматривается работа всех внешних и внутренних сил в поперечном сечении бетонной ветви на возможном перемещении $\varphi(z^*)$:

$$\int_F \frac{d\sigma_x}{dx} \varphi(z^*) dF - \int_F \tau_{xz} \frac{d\varphi}{dz^*} dF = 0. \quad (9)$$

После преобразований с учетом условия (5) получается уравнение

$$M_{bi}''(x) - k^2 M_{bi}(x) = 0, \quad (10)$$

$$k^2 = C_\varphi / A_\varphi.$$

Здесь C_φ – поперечная обобщенная жесткость, связанная с деформациями продольного сдвига в бетонной ветви: g_{s1} и g_{s2} .

$$C_\varphi = \int_{-m_0}^{z_0} G_b \left(\frac{d\varphi}{dz^*} \right)^2 b(z^*) dz^* \quad (11)$$

Для элемента прямоугольного сечения при упругой работе бетона для участка между трещинами $C_\varphi = C_{\varphi e}$

$$\frac{C_{\varphi e}}{G_b} = \frac{4b}{3h} \left\{ \left(1 + \frac{h}{z_0}\right)^2 \frac{h}{z_0} + \left(1 + \frac{h}{m_0}\right)^2 \frac{h}{m_0} \right\}. \quad (12)$$

Обобщенные жесткости A_φ и C_φ в сечении с трещиной будут иметь другие значения с учетом глубины нормальной трещины λ , а также с учетом развития неупругих деформаций бетона.

Решение уравнения (10) записывается в виде

$$M_{bi}(x) = C_1 \operatorname{ch} kx + C_2 \operatorname{sh} kx. \quad (13)$$

Рассматривается фрагмент стержня длиной, равной расстоянию между трещинами l_{crc} . Начало отсчета координаты x принимаем в середине бетонного блока, ограниченного смежными трещинами. Принимаются граничные условия:

$$\text{при } x = -l_{crc}/2 \quad M_{bi}(-l_{crc}/2) = N_{s2,l} \varphi_2(-(m_0 - a_2)) + N_{s1,l} \varphi_1(z_0 - a_1);$$

$$\text{при } x = l_{crc}/2 \quad M_{bi}(l_{crc}/2) = N_{s2,r} \varphi_2(-(m_0 - a_2)) + N_{s1,r} \varphi_1(z_0 - a_1).$$

Здесь $N_{s1(2),l(r)}$ – усилия в арматурных ветвях $A_{s1}(A_{s2})$ в начале и в конце участка блока между смежными трещинами. Поскольку усилие в арматурной ветви A_{s1} сжимающее, а в A_{s2} растягивающее, то $\varphi_2(z^*) = -\varphi_1(z^*)$. Выражение для бимоента для участка стержня, где изгибающий момент от внешней нагрузки меняется незначительно: $M(x) \cong \text{const}$ определяется как

$$M_{bi}(x) = \{N_{s2} \varphi(-(m_0 - a_2)) + N_{s1} \varphi(z_0 - a_1)\} \frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{ch} \frac{kl_{crc}}{2}}. \quad (14)$$

В процессе силового деформирования железобетонного изгибаемого элемента в зонах контактного взаимодействия бетонной ветви с арматурными ветвями A_{s1} и A_{s2} возникают сдвигающие усилия T_{s1}, T_{s2} , вызывающие взаимные сдвиги g_{s1}, g_{s2} .

В развернутом виде система дифференциальных уравнений, для определения параметров напряженно-деформированного состояния, при наличии дискретных трещин (рис. 2) выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} (T'_{s1}(x) G_{link1}^{-1}(x))' &= \Delta_{11}(x) T_{s1}(x) + \Delta_{12}(x) T_{s2}(x) + \Delta_{10}(x) \\ (T'_{s2}(x) G_{link2}^{-1}(x))' &= \Delta_{12}(x) T_{s1}(x) + \Delta_{22}(x) T_{s2}(x) + \Delta_{20}(x) \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

где G_{link1}, G_{link2} – жесткости связей сдвига между бетонной и арматурными ветвями A_{s1}, A_{s2} ;

Наиболее часто граничные условия записываются для сдвигающих усилий T_s : $T_{sj}(0) = T_{sj0}, T_{sj}(L) = T_{sjL}, j = 1, 2$; здесь L – длина стержня.

Коэффициенты уравнений имеют следующий вид:

$$\Delta_{11} = (E_{s1} A_{s1})^{-1} + A_e^{-1} + (z_0 - a_1)^2 B_e^{-1} F_1(N, \rho^{-1}), \quad (16)$$

$$\Delta_{12} = -A_e^{-1} + (z_0 - a_1)(m_0 - a_2)B_e^{-1}F_1(N, \rho^{-1}), \quad (17)$$

$$\Delta_{21} = -A_e^{-1} + (z_0 - a_1)(m_0 - a_2)B_e^{-1}F_2(N, \rho^{-1}), \quad (18)$$

$$\Delta_{22} = (E_{s2}A_{s2})^{-1} + A_e^{-1} + (m_0 - a_2)^2B_e^{-1}F_2(N, \rho^{-1}), \quad (19)$$

$$\Delta_{10} = -M(x)B_e^{-1}(z_0 - a_1)F_1(N, \rho^{-1}) - M_{bi}(x)A_\varphi^{-1}\varphi(z_0 - a_1), \quad (20)$$

$$\Delta_{20} = -M(x)B_e^{-1}(m_0 - a_2)F_2(N, \rho^{-1}) - M_{bi}(x)A_\varphi^{-1}\varphi(-(m_0 - a_2)). \quad (21)$$

Здесь $N = N_{s1} + N_{s2}$ – продольная сила, возникающая в бетонной ветви при деформировании в составе составного стержня. В данном случае, при отсутствии внешней продольной силы $N_{s2} = T_{s2}$, $N_{s1} = -T_{s1}$. Функции $F_1(N, \rho^{-1})$, $F_2(N, \rho^{-1})$ учитывают нелинейности деформирования бетонной ветви – развитие неупругих деформаций в бетоне, наличие трещин и зависят от вида исходной диаграммы $\sigma_b - \varepsilon_b$.

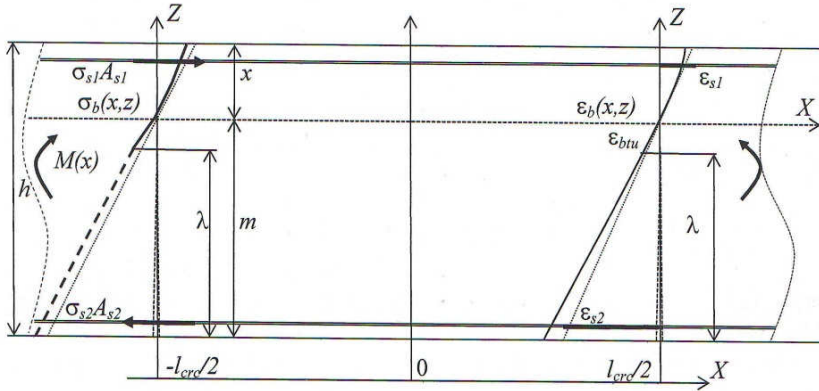


Рис. 2. Характер напряженно-деформированного состояния в сечении с дискретной трещиной

Расчет железобетонного элемента осуществляется в процессе виртуального деформирования при пошаговом нагружении. Учет деформаций бетона производится после образования трещин. При решении системы уравнений (15) значение бимомента принимается с предыдущего шага счета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов В.В. Сложный изгиб железобетонных элементов с трещинами / В.В. Белов, Д.А. Семенов // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тез. докл. IV Междунар. симп. Челябинск, 2012. С.146-148.

2. Бондаренко В.М. Инженерные методы нелинейной теории железобетона / В.М. Бондаренко, С.В. Бондаренко. М.: Стройиздат, 1982. 287 с.
3. Власов В.З. Избранные труды. Т. II. Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1963. 507 с.
4. Дьяков С.Ф. Построение и анализ конечного элемента тонкостенного стержня с учетом деформаций сдвига для решения задач динамики / С.Ф. Дьяков, В.В. Лалин [Электронный ресурс] // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2013. №5. Режим доступа: <http://naukovedenie.ru>
5. Полищук В.А. Уравнения упругой деформации балки с учетом нестесненной деформации в форме метода конечных элементов / В.А. Полищук, В.Д. Чубань // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. XV, №1. С. 82-94.
6. Тихий М. Расчет железобетонных рамных конструкций в пластической стадии. Перераспределение усилий: пер. с чеш. / М. Тихий, Й Ракосник. М.: Стройиздат, 1976. 198 с.
7. Травуш В.И. Прочность железобетонных балок с жесткой арматурой из высокопрочного бетона / В.И. Травуш, Д.В. Конин, А.С. Крылов // Инженерно-строительный журн. 2018. №3(78). С. 36-44.

УДК 621.891: 621.026

Д. О. Бытев, Л. В. Королев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: korolevLv@mail.ru

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА – ПЛАНКА В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

Предложена модель, в которой распределение времени безотказной работы системы рассматривается как стационарное решение кинетического уравнения Фоккера – Планка для протекающего в системе случайного процесса. Найдено и исследовано распределение времени безотказной работы в случае, когда кинетическое уравнение содержит операторы дробной производной.

Ключевые слова: теория надежности, время безотказной работы, кинетическое уравнение, дробная производная, стационарное распределение.

D. O. Bytev, L.V. Korolev

Yaroslavl State Technical University
Yaroslavl, Russia, e-mail: korolevLv@mail.ru

FRACTIONAL DERIVATIVE FOKKER – PLANCK EQUATION IN THE RELIABILITY THEORY

A model is proposed in which the distribution of the time of trouble-free operation of the system is considered as a stationary solution of the Fokker-Planck kinetic equation for a random process occurring in the system. The distribution of the time of trouble-free operation in the case when the kinetic equation contains fractional derivative operators is found and investigated.

Keywords: reliability theory, trouble-free time, kinetic equations, fractional derivatives, stationary distributions.

В различных инженерных приложениях при оценке надежности работы технических систем полагают, что случайная величина T , равная времени безотказной работы системы, имеет плотность распределения

$$p(\tau) = \tau_0^{-1} \exp(-\tau / \tau_0), \quad (1)$$

где $\tau_0 > 0$ – параметр размерности времени. Момент лабораторного времени t , от которого отсчитывается время τ , выбирается произвольно. Широкое применение показательного распределения (1) в теории надежности во многом связано со следующим свойством этого распределения [1]. Пусть техническая система состоит из n статистически независимых элементов, работа которых безусловно необходима для работы системы. Если продолжительность безотказной работы i -го элемента определяется случайной величиной T_i , то время безотказной работы системы $T = \min(T_1, \dots, T_n)$ при больших значениях n будет распределено по закону (1), каковы бы ни были законы распределения величин T_i . Доказательство этого свойства проводится с помощью предельного перехода $n \rightarrow \infty$ в выражении для функции распределения времени T , которая определяется функциями распределения величин T_i . Таким образом, распределение (1) оказывается устойчивым по отношению к операции \min , подобно тому, как нормальное распределение устойчиво по отношению к сложению. В настоящей работе предлагается другой способ получения плотности распределения времени безотказной работы, основанный на следующей модели.

Будем считать, что распределение времени безотказной работы системы τ не определено заранее, а формируется в результате протекания некоторого эффективного случайного процесса, параметры которого отражают свойства элементов системы и характер их взаимодействия. Простейшее стохастическое уравнение для такого процесса может быть записано в виде

$$\frac{d\tau}{dt} = -a_1 + \sqrt{2b_1} \xi(t), \quad (2)$$

где $a_1 > 0$ - постоянная скорость уменьшения времени безотказной работы, пропорциональная числу элементов системы, необходимых для ее

функционирования; $\xi(t)$ – дельта-коррелированный случайный шум единичной интенсивности, $b_1 > 0$ – коэффициент, определяемый структурой системы и характеристиками ее элементов. Выражению (2) соответствует уравнение Фоккера – Планка [2]

$$\frac{\partial p(\tau, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(a_1 p(\tau, t) + b_1 \frac{\partial p(\tau, t)}{\partial \tau} \right), \quad (3)$$

которое имеет стационарное решение $p_{st}(\tau) = p(\tau, t \rightarrow \infty)$, не зависящее от начального условия $p(\tau, t = 0)$ и удовлетворяющее соотношению

$$a_1 p_{st}(\tau) + b_1 \frac{\partial p_{st}(\tau)}{\partial \tau} = 0. \quad (4)$$

С учетом условия нормировки

$$\int_0^{\infty} p_{st}(\tau) d\tau = 1, \quad (5)$$

из уравнения (4) следует представление

$$p_{st}(\tau) = \frac{a_1}{b_1} \exp\left(-\tau \frac{a_1}{b_1}\right), \quad (6)$$

в точности соответствующее (1), если положить $\tau_0 = b_1 / a_1$. Заметим, что описанная процедура получения показательного распределения как стационарного распределения для случайного процесса аналогична известному выводу нормального распределения как стационарного для процесса Орнштейна – Уленбека [2].

Предлагаемый подход к моделированию распределения времени безотказной работы можно применить для анализа систем, имеющих многоуровневую структуру со сложными нелокальными взаимосвязями между элементами, например, нейронных и транспортных сетей, систем мобильной связи, биологических и экономических объектов. Случайные процессы в таких системах часто описываются дробно-дифференциальным уравнением Фоккера – Планка [3], которое, применительно к изучаемому процессу, может быть записано в виде

$$\frac{\partial p(\tau, \beta, t)}{\partial t} = \frac{\partial^\beta}{\partial \tau^\beta} \left(a_\beta p(\tau, \beta, t) + b_\beta \frac{\partial^\beta p(\tau, \beta, t)}{\partial \tau^\beta} \right), \quad (7)$$

где $\partial^\beta / \partial \tau^\beta$ – интегро-дифференциальный оператор дробной производной, действующий на произвольную функцию $f(\tau)$ по правилу

$$\frac{\partial^\beta}{\partial \tau^\beta} f(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{f(\tau') d\tau'}{(\tau-\tau')^\beta}, \quad (8)$$

$a_\beta > 0, b_\beta > 0, 0 < \beta < 1$ – модельные параметры, $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Стационарное состояние процесса (7) определяется уравнением

$$a_\beta p_{st}(\tau, \beta) + b_\beta \frac{\partial^\beta p_{st}(\tau, \beta)}{\partial \tau^\beta} = 0, \quad (9)$$

решение которого, принимая во внимание условие нормировки (5), можно записать в виде [4]:

$$p_{st}(\tau, \beta) = \frac{1}{\tau \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^\beta} E_{\beta, \beta} \left(-\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^\beta \right), \quad (10)$$

где $E_{\beta, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / \Gamma(\beta(k+1))$ – обобщенная функция Миттаг – Леффлера, $\tau_0 = (b_\beta / a_\beta)^{1/\beta}$. При $\beta = 1$ распределение (10) совпадает с показательным распределением (1). Укажем асимптотические выражения плотности (10) при малых и больших значениях τ для $\beta < 1$:

$$p_{st}(\tau, \beta) \approx \begin{cases} \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^\beta \frac{1}{\Gamma(\beta)}, & \tau \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\tau} \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^\beta \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)}, & \tau \rightarrow \infty \end{cases}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что, в отличие от распределения (1), распределение (10) при $\beta < 1$ имеет бесконечное математическое ожидание

$\langle \tau \rangle = \int_0^\infty p_{st}(\tau, \beta) \tau d\tau$, так как интеграл расходится на верхнем пределе.

Представленные на рис. 1 графики показывают, что с уменьшением параметра β одновременно увеличиваются вероятности попадания τ в области малых ($\tau \ll \tau_0$) и больших ($\tau \gg \tau_0$) значений, а вероятности наблюдения $\tau \sim \tau_0$ уменьшаются. В этих условиях нельзя определить характерное время, в течение которого следует ожидать отказа системы. Она может с заметной вероятностью выйти из строя очень быстро, либо, напротив, пребывать в безотказном состоянии сколь угодно долго.

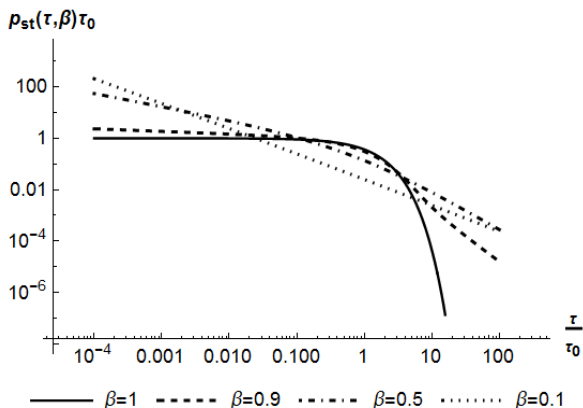


Рис. 1. Графики плотности распределения (10) при различных значениях параметра β

Таким образом, в работе предложен новый подход к моделированию распределения времени безотказной работы систем, имеющих сложную структуру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. М.: Высшая школа, 2000. 480 с.
2. *Гардинер К. В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986, 538 с.
3. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
4. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

УДК 517.925

А. Ю. Гагарин, В. М. Дудин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: dudinvm@ystu.tu

ЭНЕРГОЭФФЕКТИВНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ АСФАЛЬТОБЕТОННОЙ СМЕСИ

В статье рассматривается влияние размера фракции щебня на содержание в нем влаги при хранении в штабеле на асфальтобетонном заводе.

Ключевые слова: фракционированный щебень, влажность.

A. Y. Gagarin, V. M. Dudin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: dudinvm@ystu.tu

ENERGY EFFICIENT PRODUCTION TECHNOLOGY OF ASPHALT MIX

The article discusses influence of the crushed stone fraction size on the moisture content during storage in the stack at the asphalt plant.

Keywords: *fractionated crushedstone, humidity.*

Асфальтобетонный завод (АБЗ) – это комплекс технологического, энергетического и вспомогательного оборудования, являющийся основным производственным предприятием дорожного хозяйства, предназначенного для выполнения операций по приготовлению асфальтобетонных смесей, реконструкции и ремонта слоев асфальтобетонного покрытия.

В старой, традиционной системе производства асфальтобетонных смесей щебень всех необходимых фракций складировается на больших, открытых площадях. Щебень мелких фракций до 5 мм, составляющий основную часть асфальтобетонных смесей, подвергается воздействию внешних факторов, таких как дождь и ветер. Эти факторы являются причиной рассеивания, увлажнения, загрязнения и окисления материала.

В новой технологии производства асфальтобетонных смесей предлагается вместо складирования щебня нескольких фракций складировать щебень одной фракции. При этом использовать щебень фракции 40-70 мм. Единственной причиной, по которой используется щебень именно фракции 40-70 мм, является отсутствие влажности в крупных балластовых материалах.

Необходимый для производства щебень подается гусеничным питателем по туннелю из места складирования в дробилку контролируемым потоком. В системе имеется вертикальная дробилка; раздробленный щебень с помощью вертикального элеватора отправляется в бункеры; просеянный щебень оседает не хаотично, а по определенной траектории во избежание сегрегации. В нижней части имеется 5 ленточных конвейеров, предназначенных для подачи материала в сушильный барабан асфальтового завода.

Если рассмотреть новую технологию, то можно отметить два важных момента. Прежде всего, это отсутствие необходимости предварительного дробления используемого в производстве асфальта щебня на мелкие фракции, то есть нет необходимости складирования нескольких видов щебня, так как влажность крупного щебня в двенадцать раз меньше влажности мелкого щебня. Второе, и не менее важное – дробление щебня осуществляется непосредственно перед производством асфальтобетонной смеси. Это также является для нас преимуществом, потому что тепловая энергия, выделяемая в процессе дробления щебня, сохраняется.

Сравнивая традиционную систему производства асфальтобетонных смесей и новую, получаем, что в традиционной системе влажность составляет 3-5 %, в зависимости от погодных условий и типа щебня, в новой системе влажность составляет 0,25 %.

Разница, образующаяся в результате низкой влажности щебня очень важна, так как даже при влажности 3 % энергия, расходуемая на обсушку и нагрев в двенадцать раз больше, чем в новой системе, а выделение CO₂ уменьшается пропорционально к сэкономленной энергии. В результате, благодаря использованию щебня низкой влажности достигается экономия энергии от 37 до 49 %.

В традиционной системе важнейшей проблемой является пылевое загрязнение. Данная проблема решалась путем водного орошения, но это обходится очень дорого, так как щебень, используемый в асфальтовом производстве, должен быть полностью высушен, кроме того, такой метод вызывает окисление материала.

Фактором, способствующим образованию пыли в традиционной системе являются вторичные дробилки. В новой системе используются только первичные дробилки, так как во вторичных нет необходимости, ведь вторичное дробление осуществляется рядом с асфальтовым заводом и непосредственно перед производством асфальтобетонной смеси.

Выделяемая в процессе дробления пыль, являющаяся причиной загрязнения окружающей среды, задерживается внутри системы и накапливается в пылеулавливающем устройстве асфальтового завода, затем используется в качестве промышленного материала-заполнителя. Дробление, просеивание, хранение и питание асфальтового завода осуществляется в закрытой системе.

По причине использования в новой системе единственной фракции щебня, холодные бункеры используются только в случае необходимости. Щебень подвозится грузовиками к месту складирования и по ленточным конвейерам поступает в систему. Таким образом, для питания завода щебнем отпадает необходимость в погрузчиках. Отсутствие погрузчиков в значительной степени снижает затраты и повышает надежность рабочей площадки. Но при возникновении необходимости в других видах щебня всегда имеется доступ к холодным бункерам.

Уменьшение уровня влажности обеспечивает множество других преимуществ, например, производитель асфальтобетонной смеси, перевозящий для своего производства 100 тысяч тонн щебня, в то же время перевозит 3000 тыс. т. воды; то есть 200 самосвалов воды, подлежащей дальнейшему испарению.

Следует также отметить, что затраты на складирование нескольких видов щебня, особенно мелких фракций, выше затрат на складирование одного типа щебня.

При работе с влажными материалами расходуется большое количе-

ство энергии и, следовательно, снижается производительность асфальтового завода. Новая система, снижая влажность до минимума, позволяет эксплуатировать завод на полную мощность. Минимизированный уровень влажности также позволяет продлить рабочий сезон.

Для подбора основного и вспомогательного оборудования асфальтобетонного завода, работающего по новой технологии, необходимо было уточнить изменение влажности щебня при его хранении на открытых производственных площадках. Для этого были проведены экспериментальные исследования, которые включали:

- промывку неотсортированного щебня;
- сушку щебня;
- сортировку щебня по фракциям (4-8 мм, 16 мм, 22,4 мм, 31,6 мм) в лабораторных ситах (ГОСТ Р 5156-99);
- погрузку сит в воду на всю глубину;
- взвешивание щебня в ситах на электронных весах «Massa-k» с точностью взвешивания до одного грамма.

На основании приведенных выше исследований получили следующие результаты (табл. 1).

Формула для нахождения относительной влажности:

$$\varphi = \frac{m}{m_0} * 100\%,$$

где φ – относительная влажность, %; m – масса испаренной влаги, г; m_0 – чистая масса щебня, г.

Таблица 1 – Результаты эксперимента

Фракция	Дата	Время взвешивания	Время сушки	Масса сита, гр.	Масса щебня и сита, г	Чистая масса щебня, г	Масса испаренной влаги, г	Относительная влажность, %
31,6 мм	07.12.18	13:00	0:00	630	10065	9435	0	0
		14:00	1:00	630	10045	9415	20	0,21
		15:00	2:00	630	10038	9408	27	0,29
		16:00	3:00	630	10030	9400	35	0,37
		19:00	6:00	630	10025	9395	40	0,42
	12.12.18	9:30	20:30	630	10000	9370	65	0,69
22,4 мм	13.12.18	13:20	0:00	630	9115	8485	0	0
		14:20	1:00	630	9095	8465	20	0,24
		15:20	2:00	630	9090	8460	25	0,29
		16:20	3:00	630	9085	8455	30	0,35
		17:40	4:20	630	9080	8450	35	0,41
	14.12.18	11:00	21:40	630	9045	8415	70	0,82
16 мм	07.12.18	13:00	0:00	630	8385	7755	0	0
		14:00	1:00	630	8355	7725	30	0,39
		15:00	2:00	630	8340	7710	45	0,58
		16:00	3:00	630	8330	7700	55	0,71
		19:00	6:00	630	8320	7690	65	0,84
	08.12.2018	9:30	20:30	630	8275	7645	110	1,42

По результатам проведённых исследований были построены графические зависимости изменения относительной влажности щебня от продолжительности сушки для различных фракций щебня (рис. 1).

Анализ полученных результатов исследований позволяет сделать следующие выводы:

1. В результате проведенного исследования практически подтверждено, что в щебне крупной фракции содержится меньше влаги, чем в щебне более мелкой фракции.

2. Опытным путем была выявлена закономерность влияния размера фракции щебня на содержание влаги в нем при хранении щебня в штабеле на асфальтобетонном заводе.

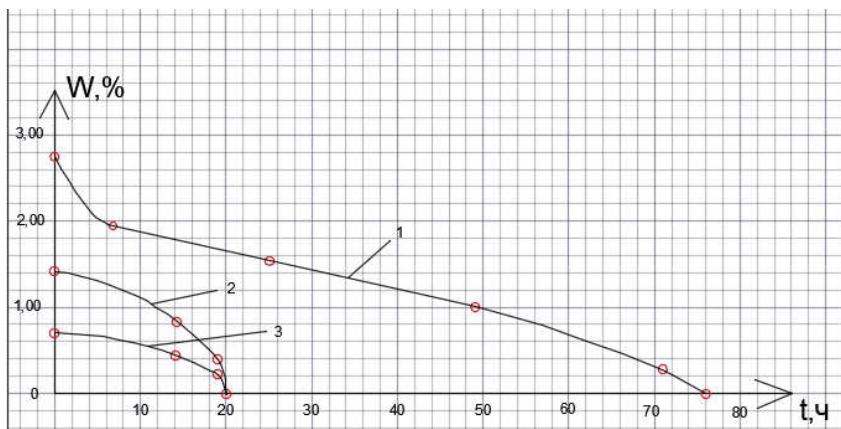


Рис. 1. Графики изменения влажности с течением времени:
1 - фракция 4-8 мм; 2 - фракция 16 мм; 3 - фракция 32 мм

Выполненные исследования позволили выбрать асфальтосмесительную установку и дробилку для производства асфальтобетонной смеси по предлагаемой технологии.

Технические характеристики дробилки:

- Модель – КМД-2200
- Приемное отверстие – 100 мм
- Разгрузочная щель – 5-15 мм
- Мощность электродвигателя – 250 кВт
- Масса– 93 т
- Производительность– 160-250 м³/ч
- Завод-изготовитель - ОМЗ

Асфальтосмесительная установка ДС-185-160 имеет следующую характеристику:

- Производительность - 160 т/ч;
- Агрегат готовой смеси – 50, 100 т, с измерением веса готового асфальта;
- Число бункеров питания – 6 шт.;
- Сушильный барабан – 2,2 (диаметр) x 9 м (длина);
- Привода барабана – фрикционные привода 4 x 11 кВт;
- Топливо горелки - жидкое топливо или природный газ;
- Системы пылеулавливания - циклоны или рукавный фильтр;
- Эффективность фильтра - 99,70%;
- Площадь фильтра - 240 м²;
- Вибрационный грохот - 4 уровня (4 сита);
- Горячие бункера - 4 отсека с датчиками уровня;
- Привод смесителя - два синхронизированных мотор-редуктора по 37 кВт;
- Объем смесителя - 2000 кг/замес.

Технологическая схема асфальтобетонного завода с подобранной асфальтосмесительной установкой и дробилкой для дробления крупной фракции щебня представлена на рис. 2.

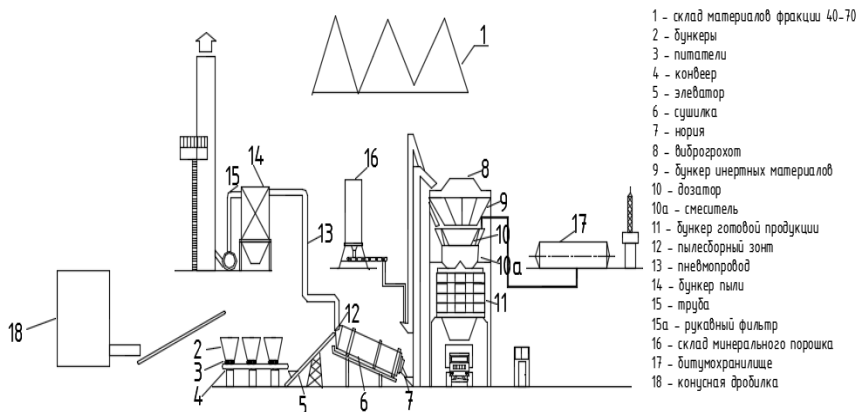


Рис. 2. Технологическая схема АБЗ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 8267-93. Щебень и гравий из плотных горных пород для строительных работ.
2. Асфальтобетонные заводы Е-МАК [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.e-mak.com>

УДК 625.7/8

М. Н. Гладышева, В. М. Дудин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: mari.gladysheva.95@mail.ru, dudinvm@ystu.ru*

БОРЬБА СО СНЕЖНЫМ НАКАТОМ НА АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГАХ

В статье рассматривается применение жидких противогололёдных реагентов.

Ключевые слова: *противогололёдный реагент, снежный накат.*

M. N. Gladysheva, V. M. Dudin

Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, *e-mail: mari.gladysheva.95@mail.ru, dudinvm@ystu.ru*

STRUGGLE WITH PACKED SNOW ON THE ROADS

The article discusses the use of liquid anti-icing agents.

Keywords: *anti-icing agent, snowy reel.*

Зиму любят почти все, но у нее есть одна неприятная сторона – скользкость. Одним из видов скользкости является снежный накат, который образуется на автомобильных дорогах при несвоевременной уборке свежевыпавшего снега. Для борьбы со снежным накатом используются физический метод, т.е. очистка специальными скребками и химический метод – обработка реагентами с последующей уборкой растаявшего снега снегоуборочной техникой.

Противогололёдные реагенты – это особые средства, которые используются для борьбы со скользкостью на дорогах. Их рассыпают по любой поверхности, на которой может образоваться наледь. Выбор реагентов очень большой. Они могут быть твердыми или жидкими - в зависимости от особенностей их использования.

В данной статье мы рассмотрим применение жидких реагентов.

Для опытов были приготовлены насыщенные растворы на основе реагентов: Экоруд, Ультра, НКММ и минеральная соль.

Были проведены экспериментальные исследования влияния применения жидких реагентов при удалении снежного наката на безопасность автомобильных дорог. В качестве основного критерия безопасности был выбран **коэффициент сцепления** поверхности дороги с колесом автомобиля после её обработки жидкими реагентами. Для проведения исследований использовали прибор ППК-МАДИ.

Экспериментальные исследования проводились в следующей последовательности: устанавливали прибор ППК-МАДИ на оцениваемое дорожное покрытие таким образом, чтобы его имитаторы возвышались над поверхностью на 10...12 мм. Затем покрытие под имитаторами увлажняли жидким реагентом и при помощи устройства сбрасывали груз, который скользил по направляющей штанге и ударялся о муфту. Через толкающие штанги и шарниры ударный импульс передавался имитаторам, в результате чего последние взаимодействовали с дорожным покрытием. Коэффициент сцепления фиксировался на шкале прибора при помощи измерительной шайбы. Для оценки изменения во времени коэффициента сцепления измерения выполняли четыре раза через каждые 15 минут. Результаты представлены в табл. 1.

Таблица 1. Влияние реагентов на коэффициент сцепления после обработки снежного наката

Время \ Реагенты	Через 1 минуту	Через 15 минут	Через 30 минут	Через 45 минут
Без реагента	0,090	0,090	0,090	0,090
Нордвэй	<0,050	0,167	0,310	0,100
Минеральная соль	0,050	<0,050	<0,050	<0,050
Экороуд	0,196	0,074	0,090	<0,050
Ультра	<0,050	0,196	<0,050	<0,050

Используя результаты проведённых исследований, были построены графики изменения коэффициента сцепления от времени таяния снежного наката после его обработки реагентом.

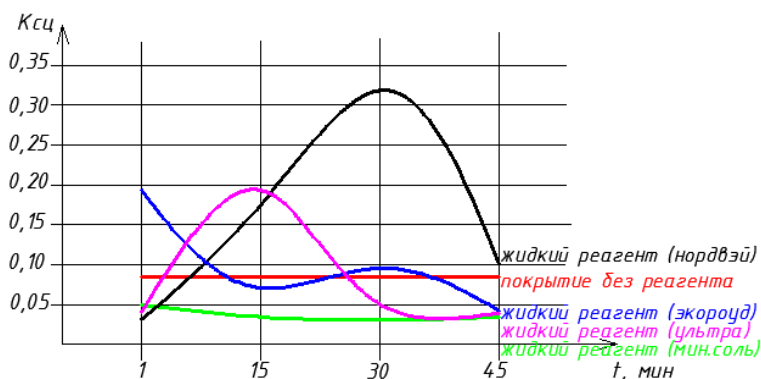


Рис. 1. График зависимости коэффициента сцепления от времени таяния снежного наката обработанного реагентами

Выводы:

1. Выполненные исследования показали, что таяние снежного наката наблюдалось при его обработке всеми реагентами.
2. Наиболее интенсивно происходило таяние снежного наката после обработки реагентом «Нордвэй».
3. Удаление снежного наката растворами минеральной соли, НКММ, Ультра нецелесообразно, так как после обработки этими реагентами резко падает коэффициент сцепления.
4. Лучший результат с точки зрения безопасности был отмечен для реагента «Нордвэй».
5. Требуется проведение дальнейших исследований для определения влияния «Нордвэй» на основные характеристики асфальтобетона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Реагенты противогололедные: производство, характеристики и применение [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://fb.ru/article/211655/reagentyi-protivogolodnyie-proizvodstvo-harakteristiki-i-primeneniye>
2. Методы борьбы со снежным накатом на дорогах [Электронный ресурс] / Группа компаний «Крот». Режим доступа: http://www.krot.su/stati/metody_borby_so_snezhnym_nakatom_na_dorogah/

УДК 666.74

В. А. Демчук, В. Б. Доброхотов, С. А. Тумаков

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: flying-afar@mail.ru,
dobrokhotovvb@ystu.ru, tumacovsa@ystu.ru

**АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ФИБРОБЕТОННЫХ КРОВЕЛЬНЫХ
ИЗДЕЛИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПОЛИПРОПИЛЕНОВУЮ
ФИБРУ**

Рассмотрена возможность изготовления на основе фибробетонной смеси кровельного штучного материала, обладающего повышенными прочностными характеристиками и содержащего полипропиленовую фибру. Произведены моделирование и расчет черепицы в программном вычислительном комплексе SCADOffice (лиц. №800908099).

Ключевые слова: *фиброволокно, черепица, прочность, модель.*

V. A. Demchuk, V. B. Dobrokhotov, S. A. Tumakov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: flying-afar@mail.ru,
dobrokhotovvb@ystu.ru, tumacovsa@ystu.ru

DETERMINING THE STRESS-STRAIN STATE OF FINE FIBRE CEMENT COMPOSITE ROOFING TILES

The paper analyzes the possibility of manufacturing on the basis of a fibroconcrit mixture of roofing piece a material having increased strength characteristics and containing polypropylene fiber. We made modeling and calculation of tiles in the software compute complex SCADOffice.

Keywords: fiberglass, roof tile, strength, model.

В настоящее время в качестве материала для покрытия кровель малоэтажных зданий часто используют штучные материалы, такие как металлопрофиль, асбестоцементные листы, керамическая черепица, цементно-песчаная черепица.

Недостатком крыши из профнастила (металлопрофиля) является повышенный уровень шума во время дождя, града, что вызывает дискомфорт и требует дополнительной звукоизоляции. Также к недостаткам можно отнести уязвимость мест стыка и повреждений листов к коррозии и наличие высокой парусности вследствие их крупноразмерности.

Использование асбестоцементных листов в качестве материала для покрытия кровель в последнее время сводится к минимуму в связи с существующей так называемой «проблемой асбеста», вызывающей оживленные споры, касающиеся его токсичности и влияния на здоровье человека как на этапе производства, так и в процессе эксплуатации, а также – по причине его дефицита. Возникающие в процессе изготовления керамической плитки сложности связаны с соблюдением тщательного температурного контроля в печи, в противном случае характеристики готовой черепицы могут оказаться неодинаковыми в разных ее точках. Зачастую по экономическим причинам вместо керамической прибегают к использованию цементно-песчаной (бетонной) черепицы. Однако по причине низкой прочности бетона на изгиб, черепицу выполняют толщиной 30 мм; такая черепица обладает значительной массой – квадратный метр достигает 45 кг, что предполагает повышение прочности несущей конструкции [1].

Таким образом, существует необходимость изготовления кровельного штучного материала, обладающего высокой прочностной характеристикой на изгиб, относительно небольшой массой, являющегося эстетически привлекательным, а также равным или отличающимся в меньшую сторону по стоимости с существующими на рынке штучными кровельными материалами.

Работа посвящена изучению возможности изготовления плоской цементно-песчаной черепицы, содержащей полипропиленовую (синтетическую) фибру. Использование армирующей волокнистой добавки позволяет повысить прочность изделия на изгиб, уменьшить его толщину, а также способствует улучшению экологии.

Целью работы является проверка возможности существования и функционирования цементно-песчаной черепицы из фибробетонной смеси на основе моделирования данного изделия, его расчет с использованием программно-вычислительного комплекса SCAD++ и, по итогу выполнения расчетов данным комплексом по определению внутренних напряжений и моментов, возникающих от нагрузок, сравнение теоретических результатов с результатами, полученными эмпирическим путем.

В предыдущем исследовании [2], посвященном разработке технологии получения мелкозернистого фибробетона для листовых изделий, были определены оптимальный состав и условия формования фибробетонной смеси. Расход компонентов: Портландцемент марки 500 - 1020 кг/м³; песок крупностью зерен до 1,25 мм - 1020 кг/м³; вода - 170 л/м³; пластификатор - 11 л/м³; фибра полипропиленовая - 1,1 кг/м³. Способ получения фибробетона заключается в перемешивании сухих компонентов с дальнейшим введением воды затворения, содержащей пластификатор (далее - ПФ) «Rheobuild 181A» и волокна фибры. Полученная масса укладывается в форму 40*40*160 мм на всю толщину будущего изделия, после чего производится ее прессование с использованием гидравлического пресса ПСУ-50 под удельным давлением 18 МПа в течение 1 минуты. Готовое изделие набирает прочность в нормальных условиях в течение 28 суток. В результате прессования толщина образцов уменьшается в 2 раза и составляет порядка 20 мм. Контроль прочности фибробетонных образцов производился путем испытания их прочности на сжатие и изгиб с использованием гидравлического пресса ПСУ-50.

На основе изученной фибробетонной смеси рассмотрен вариант изготовления плоской черепицы, аналогичной по размерам существующей на рынке цементно-песчаной черепицы «Benders Carisma» - 280*420 мм и толщиной 10 мм. В ходе выполнения работы для достижения поставленных целей в программном комплексе SCADOffice была построена модель черепицы. Изделие размерами 280*420*10 мм моделировалось как оболочка, разбитая на 7 частей с шагом 40 мм по оси X и на 7 частей с шагом 60 мм по оси Y . Учитывая, что изделие сплошно фиксируется по обрешетке, устанавливались связи в каждом из 8 узлов вдоль оси X по обоим краям изделия в направлении X , Y , Z , U_y , U_z . В качестве материала принят фибробетон с коэффициентом упругости $1,98 \cdot 10^4$ МПа. Расчет был осуществлен на нагрузку, возникающую от собственного веса и на снеговую нагрузку (IV снеговой район).

В результате проведенных вычислительных операций в программном комплексе SCADOffice получены модели напряженно-деформированного состояния (НДС) плоской черепицы, которые представлены на рис. 1 и 2.

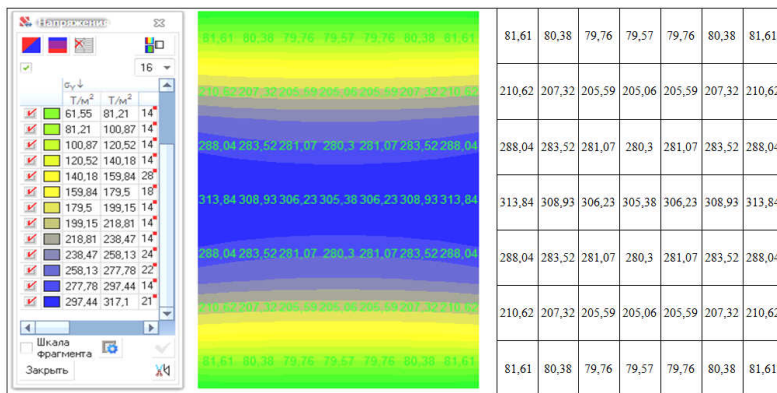


Рис. 1. Изополя нормальных напряжений по X

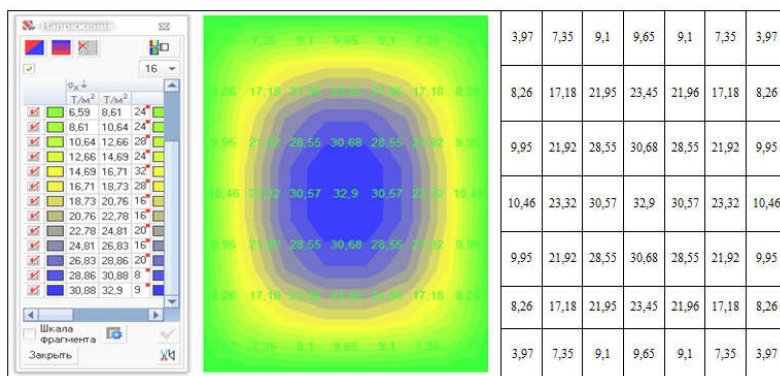


Рис. 2. Изополя нормальных напряжений по Y

Анализ НДС черепицы показал, что концентратором напряжения является затемненная область – полоса, шириной 1/6-1/5 от длины, проходящая по середине элемента, вдоль которой происходит его изгиб. При этом значение напряжения в середине элемента составило $\sigma = 313,84 \text{ Т/м}^2$.

Согласно результатам испытаний, проведенных в предыдущем исследовании [2], было установлено значение прочности на изгиб данных изделий: $R_{и} = 11,8 \text{ МПа} = 1180 \text{ т/м}^2$. Очевидно, что $R_{и} > \sigma$.

При этом, данные изделия обладают небольшой массой: 30 кг – масса черепицы на квадратный метр покрытия (на 33% меньше по сравне-

нию с обычной цементно-песчаной черепицей); эстетическим внешним видом; а также литературные источники [3] отмечают повышение морозостойкости бетонов при введении фибры, что означает увеличение долговечности изделий. Кроме того, благодаря всему вышеуказанному возникает возможность изготовления данного материала на отечественных заводах (принятая в качестве аналога «Benders Carisma» - это цементно-песчаная черепица шведского производителя).

Таким образом, на основе полученных экспериментально и при помощи программного комплекса SCADOffice результатов расчета модели фибробетонной черепицы, можно сделать вывод, что изделия из проектируемой фибробетонной смеси имеют право на существование. Доказана возможность их изготовления в промышленных объемах при условии оптимизации параметров технологического процесса. Исследование возможности производства фибробетонной черепицы показало, что получаемое изделие представляется весьма перспективным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ScienceDirect [Электронный ресурс]: научный Интернет-ресурс. Режим доступа: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212017316301074>
2. Демчук В.А. Разработка технологии получения мелкозернистого фибробетона для листовых изделий // Юбилейная семидесятая всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов с междунар. участием. 19 апреля 2017 г., Ярославль: сб. матер. конф. В 3 ч. Ч. 2. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. 603-611 с.
3. Жаворонков М.И. Определение характеристик разрушения и модуля упругости фибробетона // Известия КГАСУ. 2015. №3. С.114–120.

УДК 330.4

М. Г. Елисеев, Е. Ю. Лискина

Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина
Россия, г. Рязань, e-mail: e.liskina@rsu.edu.ru, elmage@ro.ru

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ БИНАРНОГО ВЫБОРА ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫИГРЫШЕЙ В ТОРГАХ НА ПРИМЕРЕ ТОВАРОВ МЕДИЦИНСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

В представленной статье обосновано использование моделей бинарного выбора для оценки вероятности выигрышей в аукционах и котировках, проходящих в лечебно-профилактических учреждениях, которые используют продукцию медицинского назначения АО «Елатомский приборный завод». Построены различные модели бинарного выбора от двух регрессоров: начальной стоимости лота и доли продукции завода в лоте.

Ключевые слова: аукцион, котировка, бинарная модель, модель продаж.

M. G. Eliseev, E. U. Liskina

S. Yesenin Ryazan State University
Russia, Ryazan, e-mail: e.liskina@rsu.edu.ru, elmage@ro.ru

MODELING BINARY CHOICE FOR ESTIMATING THE PROBABILITY OF WINNING THE AUCTION FOR MEDICAL SUPPLIES

In this paper we justified the use of binary choice models to assess the probability of winning auctions and quotations held in medical institutions that use the medical products of JSC "Elatomsky instrument plant". We developed various binary choice models from two regressors: the initial value of the lot and the plant's product share in the lot.

Keywords: auction, quot, binary model, sales model.

Постановка задачи. Понятие тендерных торгов и принципы их проведения пришли в Россию из-за рубежа не так давно. На данный момент, этот рыночный инструмент ввиду его простоты и публичности стал одним из ключевых отечественных подходов выбора поставщиков товаров и услуг. В России каждый день проводится около тысячи коммерческих и государственных тендеров. Ежегодно в них участвуют более двух миллионов фирм.

Закон о контрактной системе предусматривает такие виды торгов, как:

- конкурс, который в свою очередь подразделяется на открытый конкурс, конкурс с ограниченным участием, двухэтапный конкурс, закрытый конкурс, закрытый конкурс с ограниченным участием, закрытый двухэтапный конкурс;
- аукционы, которые бывают двух видов: электронный аукцион и закрытый аукцион;
- запрос котировок;
- запрос предложений.

Предприятие АО «Елатомский приборный завод» участвует в основном в электронных аукционах и котировках по 44-ФЗ и 223-ФЗ.

В данной работе мы проанализируем модуль торгов, выгруженный из программы «ELAMED» за период с 13.04.2016 по 19.12.2017 в регионе Санкт-Петербург и Ленинградская область.

В этом модуле представлены все лечебно-профилактические учреждения (ЛПУ) в регионе, которые выпускали аукционы на протяжении заданного периода, где непосредственно имеется продукция завода. В нем представлены следующие данные: название ЛПУ, начальная сумма лота, доля продукции ЕПЗ в данном лоте в процентах, дата объявления аукциона, а также, каким способом выигран/проигран аукцион (напрямую от завода либо через оптовую фирму).

Целесообразность участия в аукционе напрямую от завода состоит из нескольких основных факторов:

- маржинальность;
- возможность поставки конкурентной медицинской продукции (КМП);
- доля продукции более 75%;
- техническое задание не соответствует характеристикам товара изготовленного предприятием;
- низкая цена контракта;
- короткий срок поставки товара;

Перечисленные факторы являются разноплановыми и имеют разные последствия. Если про фактор говорим «да, выполняется», то не во всех случаях из «да» следует «участвуем».

Так, если фактор «маржинальность» удовлетворяет условиям завода, и менеджер с тендерным отделом считают, что прибыль с данного аукциона будет большая, то «да, участвуем». При любых раскладах, если все остальные факторы указывают на участие, а фактор «маржинальность» не удовлетворяет условиям завода, то участие невозможно.

Возможность поставки КМП продукции представляет собой условия закупки продукции конкурентов заводом. Если продукция имеется у поставщика и ее без каких-либо проблем можно поставить, то участие возможно, если же отдел КМП сообщает о больших сроках поставки, в которые при заключении контракта завод не успевает поставить продукцию, то участие невозможно.

Если доля продукции завода в лоте превышает 75% и при этом остальную продукцию завод может поставить, то завод участвует в торгах. Если же доля продукции превышает 75%, но при этом либо сроки поставки конкурентной продукции высоки, либо какие-то проблемы с поставками продукции, то завод не участвует в торгах.

При отслеживании торгов, менеджер в первую очередь просматривает техническое задание (ТЗ), чтобы знать, что за продукция требуется заказчику. Если какая-либо похожая продукция имеется в ТЗ, но хотя бы один пункт в ней не подходит, то завод не участвует в торгах.

Низкая цена контракта предполагает, что если на продукцию, предоставляемую другими поставщиками, но при этом подходящую под ТЗ завода, цена ниже (отсюда и цена лота ниже), то участие в аукционе невозможно.

Короткий срок поставки товара предполагает, что если в документации к аукциону указан срок поставки товара ниже, чем завод сможет его поставить, то участие невозможно.

Если все требования учтены либо учтены не полностью, но при этом учтены приоритетные факторы, то завод может участвовать напрямую. Если же какой-либо пункт или несколько пунктов не удовлетворяют участию, то продукцию своего производства предприятие может поставить

в больницу через оптовую фирму, которая согласна купить у завода продукцию. На данном этапе важно понимать, какая вероятность поставить продукцию самому заводу либо оставить аукцион оптовой фирме.

После выяснения целесообразности и принятия положительного решения об участии, нужно непосредственно подавать документы на участие в аукцион на ту торговую площадку, где он играет. И после этого следить за развитиями событий. При этом представляется актуальной задача оценивания вероятности выигрыша аукциона или котировки.

Цель представленного исследования заключается в прогнозировании вероятности выигрыша аукциона или котировки, учитывая следующие факторы: долю продукции завода и начальную цену лота.

Результаты исследования. Для построения модели были проанализированы торги за период с 13.04.2016 по 19.12.2017 в регионе Санкт-Петербург и Ленинградская область. Всего за этот период было проведено 404 аукциона. В качестве регрессоров были выбраны количественные переменные: C – начальная цена лота, X – доля продукции Елатомского приборного завода. В качестве зависимой переменной была выбрана величина I – результат участия в торгах, которая принимает значение 1, если торги выиграны, и значение 0, если торги не выиграны. Следовательно, необходимо построить модели бинарного выбора: пробит-модель, логит-модель и гомпит-модель [1]. Для построения моделей использовался пакет E-Views [2]. Результаты вычислений представлены на рис. 1–3.

Dependent Variable: V
 Method: ML - Binary Probit (Newton-Raphson / Marquardt steps)
 Date: 05/29/18 Time: 19:08
 Sample: 1 404
 Included observations: 404
 Convergence achieved after 4 iterations
 Coefficient covariance computed using observed Hessian

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.182134	0.067930	-2.681201	0.0073
X	-4.40E-08	2.41E-08	-1.826283	0.0678
McFadden R-squared	0.007700	Mean dependent var	0.408416	
S.D. dependent var	0.492150	S.E. of regression	0.490136	
Akaike info criterion	1.352040	Sum squared resid	96.57382	
Schwarz criterion	1.371849	Log likelihood	-271.1121	
Hannan-Quinn criter.	1.359881	Deviance	542.2241	
Restr. deviance	546.4316	Restr. log likelihood	-273.2158	
LR statistic	4.207517	Avg. log likelihood	-0.671069	
Prob(LR statistic)	0.040245			
Obs with Dep=0	239	Total obs	404	
Obs with Dep=1	165			

Рис. 1. Пробит-модель

Dependent Variable: V
 Method: ML - Binary Logit (Newton-Raphson / Marquardt steps)
 Date: 05/29/18 Time: 19:07
 Sample: 1 404
 Included observations: 404
 Convergence achieved after 4 iterations
 Coefficient covariance computed using observed Hessian

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.281136	0.111512	-2.521128	0.0117
X	-8.30E-08	4.93E-08	-1.684311	0.0921
<hr/>				
McFadden R-squared	0.008122	Mean dependent var	0.408416	
S.D. dependent var	0.492150	S.E. of regression	0.489931	
Akaike info criterion	1.351470	Sum squared resid	96.49292	
Schwarz criterion	1.371279	Log likelihood	-270.9968	
Hannan-Quinn criter.	1.359311	Deviance	541.9937	
Restr. deviance	546.4316	Restr. log likelihood	-273.2158	
LR statistic	4.437951	Avg. log likelihood	-0.670784	
Prob(LR statistic)	0.035148			
<hr/>				
Obs with Dep=0	239	Total obs	404	
Obs with Dep=1	165			

Рис. 2. Логит-модель

Dependent Variable: V
 Method: ML - Binary Extreme Value (Newton-Raphson / Marquardt steps)
 Date: 05/29/18 Time: 19:06
 Sample: 1 404
 Included observations: 404
 Convergence achieved after 5 iterations
 Coefficient covariance computed using observed Hessian

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.153626	0.071033	2.162732	0.0306
X	-3.63E-08	1.82E-08	-1.994004	0.0462
<hr/>				
McFadden R-squared	0.007001	Mean dependent var	0.408416	
S.D. dependent var	0.492150	S.E. of regression	0.490448	
Akaike info criterion	1.352985	Sum squared resid	96.69682	
Schwarz criterion	1.372794	Log likelihood	-271.3030	
Hannan-Quinn criter.	1.360826	Deviance	542.6059	
Restr. deviance	546.4316	Restr. log likelihood	-273.2158	
LR statistic	3.825719	Avg. log likelihood	-0.671542	
Prob(LR statistic)	0.050472			
<hr/>				
Obs with Dep=0	239	Total obs	404	
Obs with Dep=1	165			

Рис. 3. Гомпит-модель

Для оценки значимости коэффициентов построенных моделей использовалось значение Prob., для z-статистики на уровне значимости 0,05 (табл. 1).

Таблица 1. Значения Prob. для z-статистики

Модель	Коэффициент	
	при C	при X
Пробит-модель	0.0073	0.0678
Логит-модель	0.0117	0.0921
Гомпит-модель	0.0306	0.0462

Из таблицы 1 следует, что оба коэффициента одновременно являются значимыми только для гомпит-модели.

Для оценки качества в целом построенных моделей бинарного выбора были вычислены следующие критерии: $McFaddenR^2$, Akaike, Shwarz, Hannan-Quinn и Prob (LR statistic) (табл. 2).

Таблица 2 – Значения статистических критериев для построенных моделей

Модель	Критерии				
	$McFaddenR^2$	Akaike	Shwarz	Hannan-Quinn	Prob (LR statistic)
Пробит-модель	0.0077	1.3520	1.3718	1.3598	0.0402
Логит-модель	0.0081	1.3514	1.3712	1.3593	0.0351
Гомпит-модель	0.0070	1.3529	1.3727	1.3608	0.0504

Из таблицы 2 следует, что:

- 1) значение $McFaddenR^2$ в трех моделях меньше 1 и примерно на одном уровне, что свидетельствует об отсутствии статистической значимости;
- 2) по критериям Akaike, Shwarz и Hannan-Quinn модели находятся на одном уровне;
- 3) по критерию LR statistic пробит- и логит-модели являются значимыми, а гомпит-модель – не значимой.

Вывод. Таким образом, рассмотренные факторы не являются статистически значимыми для построения бинарной модели выигрыша в торгах. Следует рассмотреть другие перечисленные выше факторы, определяющие участие завода в аукционах и котировках. Часть из них является качественными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Елисеева И.И. Эконометрика: учебник / И.И. Елисеева [и др.]; под ред. И.И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика, 2007. 576 с.
2. Бравичева О.С. Эконометрическое моделирование в пакете Eviews: метод. указания к практикуму и самостоятельной работе студентов / О.С. Бравичева, О.И. Стебунова. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. 36 с.

УДК 531.78

В. Л. Зудин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: zudinvl@ystu.ru

ОСОБЕННОСТИ СТАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДРОССЕЛЬНОГО ПНЕВМОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Анализируются особенности статических характеристик дроссельного пневматического преобразователя типа "сопло-заслонка" с учётом общепринятых допущений.

Ключевые слова: элемент "сопло-заслонка", статическая характеристика, характерные точки и линии.

V. L. Zudin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zudinvl@ystu.ru

ON STATIC CHARACTERISTICS OF A THROTTLE PNEUMATIC CONVERTER

On the basis of generally accepted assumptions the features of static characteristics of pneumatic throttle converter are analyzed.

Keywords: nozzle-flap element, static characteristic, feature points and lines.

Статья посвящена исследованию классической модели статической характеристики пневматического элемента "сопло-заслонка" с учётом общепринятых допущений, обычно используемых при инженерных расчетах элемента (постоянство температуры воздуха при истечении, несжимаемость среды, равенство коэффициентов расхода в обоих дросселях, отсутствие потери давления при прохождении через дроссели и пр.).

Элемент "сопло-заслонка" наиболее часто используется как измерительный преобразователь механического перемещения подвижной заслонки относительно неподвижного сопла в выходное давление сжатого воздуха. Такие преобразователи применяют практически во всех современных приборах пневмоавтоматики.

Элемент (рис. 1) состоит из дросселя с постоянным проходным диаметром d (сечение S_1), междроссельной камеры МК, сопла с диаметром d_c и заслонки. Сопло и заслонка образуют дроссель с переменным проходным сечением S_2 . Таким образом, давление p (оно же – выходное давление $P_{\text{вых}}$ элемента "сопло-заслонка") в междроссельной камере зависит от зазора x между соплом и заслонкой.

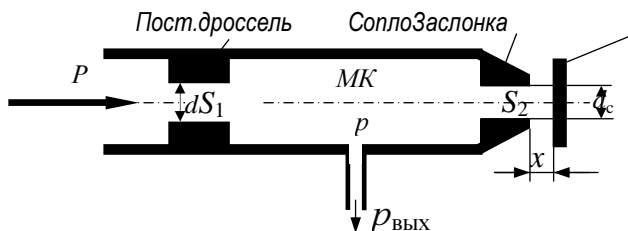


Рис. 1. Расчетная схема элемента "сопло-заслонка"

Зазор между соплом и заслонкой в измерительных пневмопреобразователях обычно составляет от 0,02 до 0,05 мм, давление питания – от 20...25 кПа до 100...140 кПа, диаметры отверстий постоянного и переменного дросселей – от 0,2 до 0,4...1,2 мм [3] в зависимости от расстояния между соплом и заслонкой и давления перед соплом при атмосферном давлении за соплом [5]. Далее рассматривается более узкий диапазон диаметров (от 0,4 до 1,1...1,2 мм), характерный для пневматических измерительных приборов.

Величина объема междроссельной камеры (МК) и подключаемого к ней манометра вместе с соединительной трубкой между ними влияет лишь на динамические свойства элемента.

Известно [1-3, 5], что при прохождении газообразной среды через местное сопротивление в виде постоянного или переменного дросселя возможны три режима истечения, зависящих от скорости истечения по отношению к скорости звука - докритический, критический и надкритический. Критический режим для воздуха наблюдается, когда отношение $\beta_{кр}$ входного давления ($P_{вх}$) дросселя к выходному ($P_{вых}$) составляет 0,528; при этом скорость течения воздуха на выходе из отверстия равна скорости звука. В рассматриваемом случае для постоянного дросселя входным является давление питания p_0 , выходным – давление p . Для переменного дросселя входным является давление p , выходным - атмосферное давление.

Чем больше величина β , тем меньше скорость движения газа через отверстие, т.е. при $\beta > \beta_{кр}$ обеспечивается режим докритического истечения, а при $\beta < \beta_{кр}$ – режим надкритического истечения. Поскольку значение $\beta_{кр}$ является граничным, обычно рассматривают только два режима – докритический и надкритический, применяя их к каждому местному сопротивлению в составе элемента "сопло-заслонка", т.е. к постоянному и переменному дросселю.

Доказано [1, 3], что пневматические измерительные преобразователи работают, как правило, в докритическом режиме ($d-d$), т.е. как в постоянном, так и в переменном дросселях режим истечения является докритическим. При этом обеспечивается ламинарный характер течения воздуха в дросселях.

Объемный расход Q газообразной среды при протекании через метное сопротивление (дроссель) составляет, как известно,

$$Q = \alpha S \sqrt{2\Delta p / \rho},$$

где α – коэффициент расхода; S – площадь поперечного сечения отверстия дросселя; Δp – перепад давления на дросселе; ρ – плотность среды (воздуха). Поскольку в установившемся режиме в элементе "сопло-заслонка" расход Q одинаков для обоих дросселей, можно записать [2]

$$Q = \alpha_1 S_1 \sqrt{2(p_0 - p) / \rho_0} = \alpha_2 S_2 \sqrt{2p / \rho},$$

где p – избыточное давление в междроссельной камере; α_1, α_2 и S_1, S_2 – коэффициенты расхода и площади сечений отверстий постоянного дросселя и кольцевой щели (переменного дросселя) соответственно.

Пренебрегая сжимаемостью воздуха ($\rho = \rho_0$), получим

$$\alpha_1 S_1 \sqrt{p_0 - p} = \alpha_2 S_2 \sqrt{p}.$$

Отметим, что последнее условие позволяет применять полученные ранее соотношения и для жидкостей.

Во многих случаях коэффициенты расхода α_1 и α_2 принимаются одинаковыми. Тогда после ряда простых преобразований можно записать

$$\frac{p}{p_0} = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2} = \frac{1}{1 + S_2^2 / S_1^2}. \quad (1)$$

При этом площадь сечения внутреннего канала постоянного дросселя составляет $S_1 = \pi d^2 / 4$, где d – диаметр отверстия постоянного дросселя. Площадь проходного сечения в кольцевом зазоре x между соплом и заслонкой определяется только боковой поверхностью цилиндра высотой x и диаметром d_c , т.е. $S_2 = \pi d_c \cdot x$. В данном случае величина x соответствует расстоянию между неподвижным соплом и подвижной заслонкой.

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получим уравнение статической характеристики элемента "сопло-заслонка" – зависимость относительного выходного давления $y = p / p_0$ элемента от перемещения x заслонки относительно неподвижного сопла в установившихся режимах:

$$y = \frac{1}{1 + 16 d_c^2 x^2 / d^4}. \quad (2)$$

Давление p_0 (давление питания) измерительного элемента должно иметь постоянное значение. Следовательно, p_0 выполняет лишь роль масштабного размерного коэффициента. По этой причине для дальнейшего исследования целесообразно использовать вариант уравнения статической характеристики в относительной форме (уравнение (2)). При необходимости получения результата в единицах давления следует умножить величину y на давление питания p_0 .

В обобщенном виде уравнение в относительных единицах имеет вид

$$y = \frac{1}{1 + Kx^2}, \quad (3)$$

где

$$K = 16d_c^2 / d^4. \quad (3a)$$

Следует отметить, что параметр K , определяемый значениями диаметров d и d_c , является удобным универсальным параметром, поскольку позволяет в одном выражении сосредоточить все возможные реальные сочетания величин d и d_c . Поэтому целесообразно анализировать большинство дальнейших соотношений как функции именно этого параметра.

Расчет значения K может быть выполнен непосредственно по приведенной выше формуле (3a) для заданных значений d и d_c . Для ускорения расчетов величины K можно использовать диаграмму, представленную на рис. 2 для диапазонов изменений d – от 0,3 до 1,2 мм и d_c – от 0,4 до 1,2 мм.

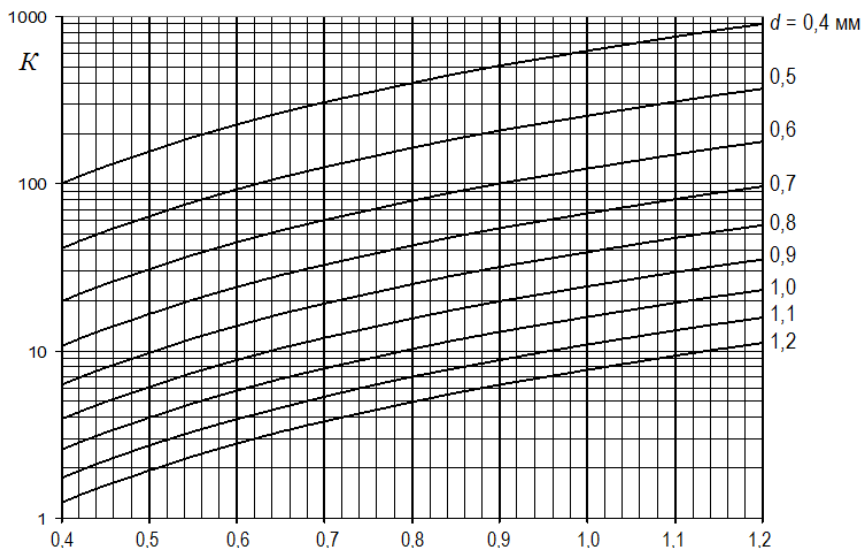


Рис. 2. Диаграмма для определения величины K по уравнению (3a)

Поскольку диапазон изменения значений K весьма широк, данные представлены в логарифмическом масштабе. При расчете все линейные размеры вводятся в миллиметрах. Параметр K имеет размерность мм^{-2} .

Диаграмма удобна для проведения ориентировочных расчетов, однако из-за использования логарифмической шкалы не обеспечивает достаточно высокой точности вычисления величины K .

Несмотря на относительно простой вид уравнения (3), кривая, рассчитанная по этому уравнению, имеет ряд интересных особенностей (характерных точек и линий), которые и анализируются далее.

Отметим, что именно такие участки (отрезки) определяют рекомендуемый диапазон измеряемых перемещений, поэтому целесообразно вычислить их длину и локализацию на кривых аналитическим путем.

На рис. 3 представлены кривые, рассчитанные по уравнению (3) для трех значений диаметра постоянного дросселя d при постоянном значении диаметра дросселя d_c .

Из анализа графиков следует, что на всех кривых, представленных на рис. 3, имеются участки, форма которых близка к линейной, что соответствует примерному постоянству значения чувствительности S .

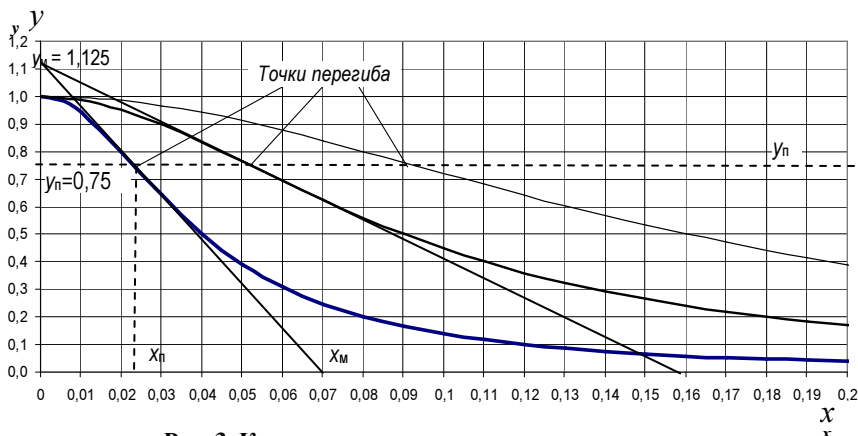


Рис. 3. К определению чувствительности датчика в точке перегиба и координат y_m и x_m

Для любого датчика важной характеристикой является его чувствительность S , представляющая собой производную относительной выходной величины y по входной x . После дифференцирования уравнения (3) получим

$$S = y' = -\frac{2Kx}{(1 + Kx^2)^2}. \quad (4)$$

Поскольку в соответствии с уравнением (3) $1/(1 + Kx^2) = y$, формула (4) приобретает вид

$$S = -2Kxy^2. \quad (4a)$$

В дальнейшем это выражение после некоторых преобразований будет использовано в качестве углового коэффициента в уравнении аппроксимирующей прямой, проведенной через точку перегиба.

Координаты точки перегиба кривой могут быть вычислены в результате дифференцирования уравнения чувствительности S , поскольку производная S' чувствительности представляет собой вторую производную y'' . Приравнивание S' к нулю дает возможность вычислить абсциссу x_n точки перегиба кривой $y = f(x)$:

$$S' = \left(\frac{-2Kx}{(1+Kx^2)^2} \right)' = \frac{-2K(1-2Kx_n^2-3K^2x_n^4)}{(1+Kx_n^2)^4} = 0.$$

Получаем биквадратное уравнение $3K^2x_n^4 + 2Kx_n^2 - 1 = 0$, единственный положительный вещественный корень которого определяется выражением

$$x_n = \sqrt{\frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})},$$

где $a = 3K^2$; $b = 2K$; $c = -1$.

После ряда преобразований получим

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{3K}}. \quad (5)$$

Ордината y_n точки перегиба (рис. 3) находится из подстановки полученного значения x_n в уравнение (3)

$$y_n = \frac{1}{1+Kx_n^2} = 0,75. \quad (6)$$

Последнее выражение показывает, что значение ординаты y_n точки перегиба кривой $y = f(x)$ не зависит от величины K . Таким образом, для любого значения K ордината y_n будет одинаковой и равной 0,75, т.е. для всех кривых, описываемых уравнением (3), точки перегиба будут находиться на одинаковой высоте по отношению к оси абсцисс. Соответствующие построения приведены на рис. 3.

Из (5), (6) и (4а) получаем выражение для чувствительности S_n датчика в точке перегиба кривой

$$S_n = -2Kx_n y_n^2 = \frac{-2\sqrt{K} \cdot 0,5625}{\sqrt{3}} = -1,125 \sqrt{\frac{K}{3}} = -0,64954\sqrt{K}. \quad (7)$$

Таким образом, чувствительность S_n в точке перегиба, а следовательно, и в пределах линеаризованного диапазона характеристики элемента "соплзаслонка" зависит только от значения K .

Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке перегиба, имеет вид $y = y_n + S_n(x - x_n)$, а с учетом равенств (5) – (7) и вид

$$y = 1,125 \left(1 - x\sqrt{K/3} \right). \quad (8)$$

Полагая здесь $x = 0$, определим ординату y_M точки пересечения касательной с осью y : $y_M = 1,125$. Таким образом, для любой кривой, описываемой уравнением (3), ордината точки пересечения касательной, проведенной через точку перегиба, всегда составляет 1,125 относительных единиц независимо от значения K .

Полагая в (8) $y = 0$, получим координату x_M точки пересечения касательной с осью абсцисс

$$x_M = \sqrt{3/K} . \quad (9)$$

Примеры кривых $y = f(x)$, рассчитанных по уравнению (3) для четырех значений величины d от 0,4 до 0,7 мм (соответственно для K от 625 до 66,64) при значении диаметра отверстия сопла $d_c = 1$ мм приведены на рис. 4.

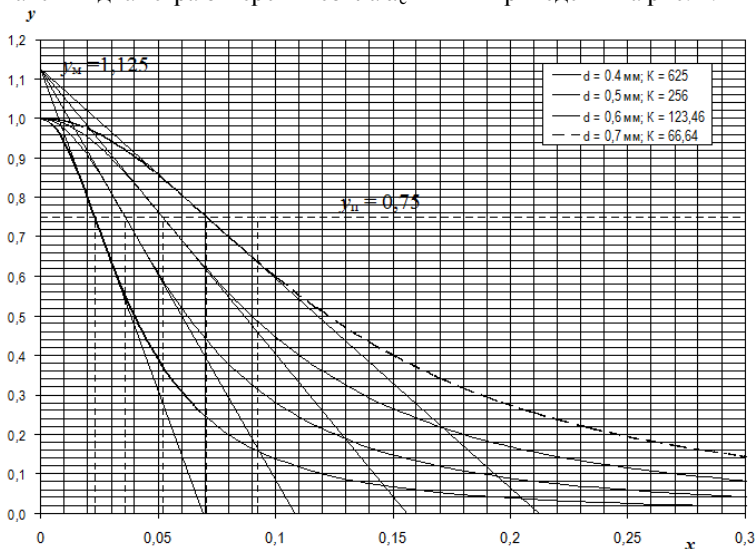


Рис. 4. Изменение относительного выходного давления $y = p/p_0$ в зависимости от расстояния x между соплом и заслонкой для различных значений диаметра d при $d_c = 1$ мм

Кроме того, на графике указаны касательные к точкам перегиба для значений d от 0,4 до 1,2 мм с шагом 0,1 мм, а также горизонтальная линия на уровне $p/p_0 = 0,75$, соответствующая постоянной ординате всех точек перегиба.

Нетрудно заметить, что при увеличении значения параметра K крутизна кривой увеличивается.

При необходимости подобные диаграммы могут быть построены для других условий (например, при постоянстве диаметра d и различных значениях d_c , при равенстве диаметров d и d_c и т.п.).

Смысл всех приведенных выше действий заключается в выявлении возможности замены вычислений по формуле (3) вычислениями по формуле (8) в рабочем диапазоне изменения переменной x . Таким диапазоном обычно считают отрезок изменения x (т.е. перемещения заслонки относительно сопла), в пределах которого можно считать результаты вычислений по формулам (3) и (8) совпадающими (с заданной относительной погрешностью $\pm\delta_y$).

Относительная погрешность δ_y по ординате может быть определена по формуле

$$\delta_y = \frac{y - y_{np}}{y} = 1 - \frac{y_{np}}{y},$$

где y – результат вычислений по формуле (3), а y_{np} – по формуле (8).

При необходимости величина δ_y может быть задана в процентах. Обычно она составляет $\pm(1-3 \%)$, т.е. $\delta_y = \pm(0,01\dots 0,03)$. В приведенной выше формуле эти значения подставляются только в относительных единицах (например, 0,01 диапазона изменения относительного выходного давления y).

Аналитическое определение величины x приводит к необходимости решения кубического уравнения

$$\delta_y = 1 - \frac{y_{np}}{y} = 1 - 1,125(1 + Kx^2) \left(1 - x\sqrt{\frac{K}{3}} \right).$$

Решение может быть выполнено либо аналитически (например, по методике, приведенной в [4]), либо итерационными методами. Результаты проведенного анализа показывают, что отклонения y_n (начальное значение диапазона Δy) и y_k (конечное значение) имеют постоянные значения независимо от величины K и определяются только величиной δ_y .

При $\delta_y = \pm 0,01$ эти значения при вычислении по уравнению (3) составляют: $y_n = 0,902556$; $y_k = 0,594363$, а диапазон изменения $\Delta y = 0,308193$. Соответствующие данные для значений y_n , y_k и диапазонов изменения Δy при различных относительных погрешностях δ_y (от 0,5 до 3 %) приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения y_n , y_k и Δy для различных погрешностей δ_y

$\pm\delta_y$	Начало диапазона y_n	Конец диапазона y_k	Ширина диапазона $\Delta y = y_n - y_k$	Значение $\Delta P_{\text{вых}}$ при $P_0=100$, кПа
0,005	0,87388	0,62488	0,24900	24,900
0,010	0,902556	0,594363	0,308193	30,8193
0,015	0,92115	0,57364	0,34751	34,751
0,020	0,93488	0,55757	0,37731	37,731
0,025	0,94566	0,54431	0,40135	40,135
0,030	0,954411	0,532945	0,42147	42,147

Значение $\delta_y = \pm 0,01$ ($\pm 1\%$), можно назвать предпочтительным, поскольку при дальнейшем увеличении этой величины происходит резкое увеличение нелинейности, т.е. отличие кривой, рассчитанной по уравнению (3) от аппроксимирующей прямой. При этом неоправданно увеличиваются диапазоны изменения Δx и Δy . Строка предпочтительного варианта ($\delta_y = \pm 0,01$ или $\pm 1\%$) выделена в табл. 1 жирным шрифтом.

В последнем столбце таблицы в качестве примера приведены значения диапазона изменения выходного давления $\Delta P_{\text{вых}} = P_0 \cdot \Delta y$ в междрессельной камере при $P_0 = 100$ кПа на линейном участке статической характеристики при заданном значении δ_y .

Таким образом, в результате проведенного выше исследования функции (3) выявлены следующие характерные свойства этой функции.

1. Ордината y_n точки перегиба (рис. 3, 4) имеет постоянное значение ($y_n = 0,75$) независимо от значения параметра K и входящих в него величин.

2. Точка пересечения всех касательных, проведенных через точку перегиба каждой кривой, вычисленной по уравнению (3), имеет постоянную ординату y_m , равную 1,125.

3. Абсцисса x_m любой касательной, проведенной через точку перегиба кривой, вычисленной по уравнению (3), имеет значение, в три раза превышающее значение абсциссы точки x_n перегиба, т.е. $x_m = 3x_n$.

4. Значения y_n и y_k , определяющие начало и конец диапазона линейности кривой для уравнения (3) определяются только величиной заданной погрешности δ_y и не зависят от значений величины K .

5. Отклонения y_n и y_k для соответствующих величин x_n и x_k имеют постоянные начальное (y_n) и конечное (y_k) значения независимо от величины K , и, соответственно, диапазон $\Delta y = y_n - y_k$ изменения относительного давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов И.А.* Элементы и системы пневмоавтоматики: Учебник для вузов / И.А. Ибрагимов, Н.Г. Фарзанае, Л.В. Илясов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1985. 544 с.
2. *Лепешкин А.В.* Гидравлические и пневматические системы / А.В. Лепешкин, А.А. Михайлин. М.: Издат. центр "Академия", 2004. 336 с.
3. *Прусенко, В.С.* Пневматические датчики и вторичные приборы. М.-Л.: Энергия, 1965. 192 с.
4. *Справочник машиностроителя.* В 6 т. Т. 1. М.: Машгиз, 1960.
5. *Справочник по средствам автоматизации / под ред. В. Э. Низэ и И. В. Антика.* М.: Энергоатомиздат, 1983. 504 с.

УДК 531.78

В. Л. Зудин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: zudinvl@ystu.ru

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ДРОССЕЛЬНОГО ПНЕВМОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Разработана диаграмма для оперативного расчета параметров дроссельного преобразователя типа "сопло-заслонка".

Ключевые слова: элемент "сопло-заслонка", диаграмма для оперативного расчета.

V. L. Zudin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: zudinvl@ystu.ru

GRAPHIC-ANALYTICAL CALCULATION THE THROTTLE PNEUMATIC CONVERTER

We give a chart for rapid calculation of parameters for the throttle converter of the "nozzle-flap" type.

Keywords: nozzle-flap element, chart for quick calculation.

По результатам исследований, проведенных в [1], здесь разработана инженерная методика графоаналитического расчета преобразователя (элемента) "сопло-заслонка" для различных значений влияющих величин. К таким величинам отнесены внутренние диаметры постоянного (d) и переменного (d_c) дросселей, диапазон входных перемещений заслонки (Δx), давление питания P_0 .

Значения изменений перемещения заслонки x_n , x_k и Δx могут быть вычислены из уравнения (3) в [1], решенного относительно x :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{\frac{1}{y_n} - 1}; \quad x_k = \frac{1}{\sqrt{K}} \sqrt{\frac{1}{y_k} - 1}. \quad \Delta x = x_k - x_n. \quad (1)$$

Величины $\sqrt{\frac{1}{y_n} - 1}$ и $\sqrt{\frac{1}{y_k} - 1}$ при $\delta_y = \pm 1\%$ составляют соответственно 0,32857 и 0,82612 ([1, табл. 1]). Тогда

$$x_n = \frac{0,328579}{\sqrt{K}}; \quad x_k = \frac{0,826120}{\sqrt{K}}; \quad \Delta x = x_k - x_n = \frac{0,497541}{\sqrt{K}}. \quad (2)$$

Рассмотрим пример определения значение диапазона изменения $\Delta x = x_k - x_n$ и его начального значения x_n (при $\delta_y = \pm 1\%$). Пусть $K = 400$ ($\sqrt{K} = 20$). Тогда по формулам (2)

$$x_n = 0,016429 \text{ мм}; \quad x_k = 0,041306 \text{ мм}; \quad \Delta x = 0,024877 \text{ мм}.$$

Для облегчения и ускорения расчетов разработана диаграмма, приведенная на рис. 1. Она составлена для погрешности $\delta_y = \pm 0,01$ (1%), а диапазон значений параметра K ограничен величинами от 100 до 6400 (что соответствует изменению величины \sqrt{K} от 10 до 80). При этом значения y_n, y_k и Δy , как было доказано в [1], постоянны и составляют соответственно: 0,90256, 0,59436 и 0,30819. Аналогичные диаграммы при необходимости могут быть построены и для других значений погрешностей, которые должны быть заданы заранее. Значения y_n, y_k и Δy для погрешностей 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5 и 3,0 % приведены в [1, табл. 1].

На диаграмме представлены три кривые: одна из них позволяет определить ширину Δx линейного диапазона перемещения заслонки, другие – начальное x_n и конечное x_k значения этого диапазона. Для их определения нужно предварительно найти (или задать) значение параметра K и вычислить корень \sqrt{K} .

На диаграмме следует найти точки пересечения перпендикуляра, восстановленного из точки $\sqrt{K} = 20$, с линиями x_n, x_k и Δx . Они в данном случае составляют 0,0165, 0,0414 и 0,0250 соответственно. Таким образом, с учетом x_n перемещение заслонки на участке с линейной характеристикой составляет от x_n до x_k , (т.е. $\Delta x = x_k - x_n = 0,0414 - 0,0165 = 0,0249 \text{ мм} = 24,9 \text{ мкм}$).

Сравнивая эти значения с полученными ранее теоретическими результатами расчета по формулам (2), ($x_n = 0,016429$, $x_k = 0,041306$ и $\Delta x = 0,024877 \text{ мм}$, нетрудно убедиться, что их отличие наблюдается, начиная лишь с третьего-четвертого знака после запятой. Представляется, что такие погрешности вполне допустимы для ориентировочных инженерных расчетов.

Таким образом, все погрешности, лежащие внутри диапазона Δy , будут меньше указанной, а в точке перегиба кривой погрешность будет нулевой. Диаграмма, приведенная на рис. 1, построена для того же значения погрешности.

Ниже рассмотрены несколько типичных случаев вычислений параметров элемента "сопло-заслонка" как с помощью диаграммы, так и полученных в [1] формул.

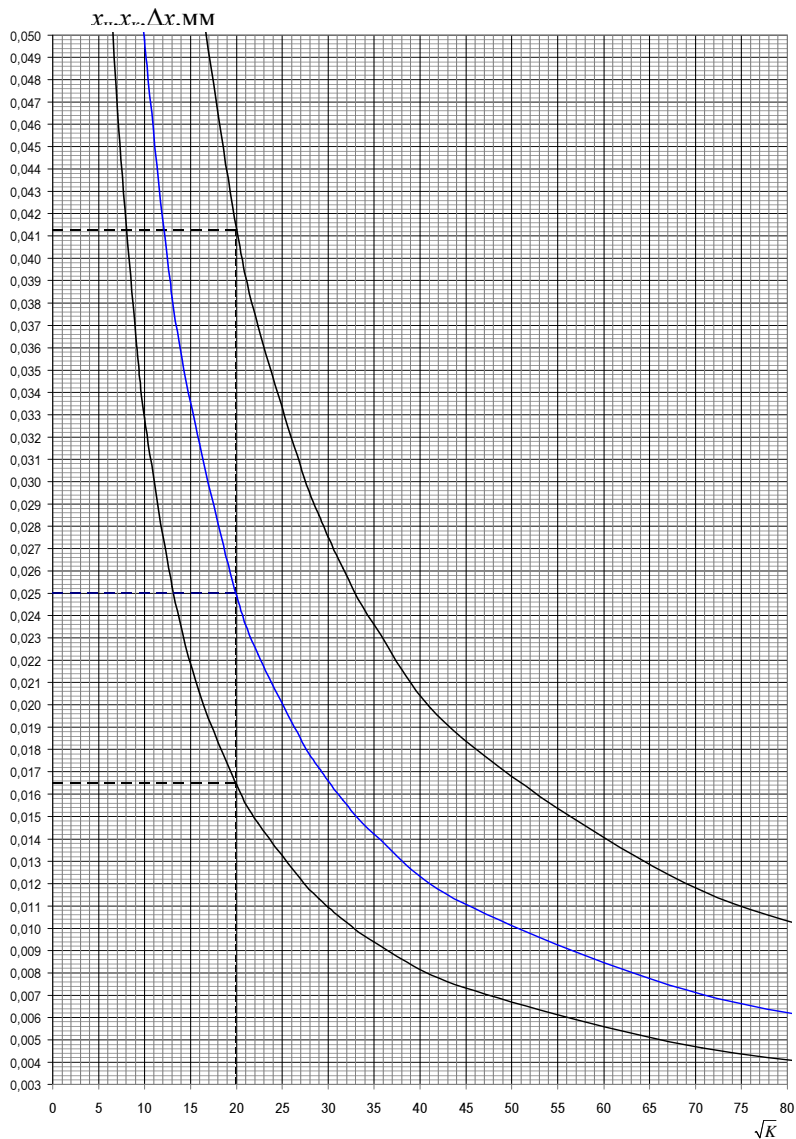


Рис. 1. Диаграмма для определения значений $x_{н}$, $x_{к}$ и линейного диапазона перемещения Δx заслонки при заданном значении параметра и погрешности $\delta_y = \pm 1\%$ с примером расчета для $\Delta x = 0,025$, $\sqrt{K} = 19,9$

1. Построение статической характеристики элемента (теоретической и аппроксимирующей) при заданных значениях диаметров дросселей d_c и d .

а) Вычисляется значение параметра K для заданных значений диаметров дросселей по диаграмме (рис. 2, а, б) или по формуле (3а) из [1], т.е. $K = 16d_c^2/d^4$.

б) По уравнению (3) [1] строится статическая характеристика $y = p/p_0$ в координатах "перемещение заслонки (x) – относительное давление (y)".

в) Вычисляется максимальное значение x_m для полученного значения K по формуле $x_m = \sqrt{3/K}$ [1].

г) Значение ординаты y_m при $x = 0$ постоянно и равно 1,125 [1].

д) Полученные значения x_m и y_m откладываются на осях абсцисс и ординат и соответствуют уравнению (8) [1] аппроксимирующей прямой.

При правильном построении аппроксимирующая прямая должна идеально совпадать с теоретической кривой в точке перегиба.

2. Определение в естественных единицах (кПа/мм или Па/мкм) чувствительности пневмопреобразователя "сопло-заслонка" на линейном участке статической характеристики.

Рассмотрим задачу на примере работы элемента "сопло-заслонка" в псевдорелейном режиме, т.е. с очень высокой крутизной статической характеристики. Для этого примем большое значение d_c и минимальное значение d (например, $d_c = 3$ мм; $d = 0,2$ мм).

Исходные данные: $d_c = 3$ мм; $d = 0,2$ мм; $P_0 = 100$ кПа.

а) По формуле (3а) [1] рассчитывается величина K . Для указанных значений диаметров дросселей она составляет 90000.

б) По формуле (7) [1] вычисляется чувствительность преобразователя в точке перегиба

$$|S| = 0,64954\sqrt{K} = 194,862 \text{ мм}^{-1}.$$

в) Для выражения чувствительности в естественных единицах необходимо умножить её значение на заданное давление питания ($P_0 = 100$ кПа). Тогда $S_d = 194,85 \cdot P_0 = 194,85 \cdot 100 = 19485$ (кПа/мм или Па/мкм) или 19,485 кПа/мкм. Разумеется, речь идет о значении чувствительности только в пределах линейного участка статической характеристики, включая точку перегиба кривой. Для участков кривой, расположенных выше и ниже линейного участка чувствительность плавно изменяется от максимального до нулевых значений в обе стороны.

3. Определение ширины рабочего (линейного) диапазона перемещения заслонки Δx и выходной величины Δy при заданном значении параметра K и погрешности $\delta = \pm 0,01$ (± 1 %).

Исходные данные: $y_n = 0,902556$; $y_k = 0,594363$; $\Delta y = 0,308193$ (см. табл. 1 для $\delta = \pm 0,01$); $K = 900$; $p_0 = 100$ кПа.

а) Поскольку на диаграмме (см. рис. 1) в качестве аргумента использована величина \sqrt{K} , определяется соответствующее значение для $K = 900$: $\sqrt{K} = 30$.

б) По диаграмме определяются (с точностью до третьего-четвертого знака после запятой) значения начала x_n , конца x_k линейного участка и его ширины Δx для $\sqrt{K} = 30$: $x_n = 0,0109$ мм; $x_k = 0,0275$; $\Delta x = 0,0165$ мм.

При необходимости получения более точных результатов вычисления x_n , x_k и Δx или при размещении абсциссы или ординаты диаграммы за её пределами можно воспользоваться уравнениями (2). При этом

$$x_n = \frac{0,328579}{30} = 0,010953 \text{ мм}; \quad x_k = \frac{0,826120}{30} = 0,027537 \text{ мм};$$

$$\Delta x = \frac{0,497541}{30} = 0,016585 \text{ мм}.$$

в) Для получения величин y_n , y_k и Δy в единицах давления необходимо умножить эти значения на величину давления питания P_0 . При этом значения $y_{нд}$, $y_{кд}$ и Δy_d умножаются на величину P_0 . Индексы "д" обозначают получение результата в единицах давления.

4. Определение значения параметра K при заданной погрешности $\delta = \pm 0,01$ и ширине требуемого диапазона изменения Δx .

Исходные данные: диапазон изменения перемещения заслонки относительно сопла Δx , задаваемый исходя из конструктивных требований. Для измерительных преобразователей данного типа значение Δx , как правило, не должно превышать 50 мкм (0,050 мм). Пусть $\Delta x = 0,025$ мм.

а) По диаграмме (см. рис. 1) находится величина \sqrt{K} для заданного значения Δx : $\sqrt{K} = 19,9$, откуда $K = 396,01$. По той же диаграмме определяется координата x_n начала линейного участка: $x_n = 0,0165$ мм и конечного: $x_k = 0,0415$ мм; (величина $\Delta x = 0,025$ мм задана). Таким образом, линейный участок начинается от значения $x_n = 0,0165$ мм и продолжается до значения $x_k = 0,0415$ мм.

При необходимости более точного вычисления можно рассчитать искомое значение K аналитически. Для этого следует воспользоваться любым из приведенных ниже соотношений, полученных из формул (2), записанных относительно K :

$$K_n = \left(\frac{0,328579}{x_n} \right)^2; \quad K_k = \left(\frac{0,826120}{x_k} \right)^2; \quad K_{\Delta x} = \left(\frac{0,497541}{\Delta x} \right)^2. \quad (3)$$

Каждая из этих формул должна дать при вычислении примерно одинаковый результат. В нашем случае наиболее надежным и точным является результат для Δx_n , поскольку эта величина задана.

$$K = K_{\Delta x} = \left(\frac{0,497541}{0,025} \right)^2 = 396,07.$$

По диаграмме было определено $K = 396,01$. Для проверки вычислим значения K_n и K_k :

$$K_n = \left(\frac{0,328579}{0,0165} \right)^2 = 396,57; \quad K_k = \left(\frac{0,826120}{0,0415} \right)^2 = 396,25.$$

Как видим, значения получились весьма близкими, что свидетельствует о достаточной для практических расчетов достоверности данных диаграммы. Анализ показывает, что при правильном и аккуратном использовании диаграммы ошибка определения значения K не превышает 0,5% от расчетного значения.

5. Определение диаметров d_c , d дросселей при заданном значении K

Зависимость между диаметрами дросселей d_c , d и значением параметра K описывается приведенной в [1] формулой (3а), из которой следуют соотношения, применимые для расчета диаметров дросселей при различных способах задания диаметров дросселей d_c , d или их равенстве

$$a) \ d_c = \frac{d^2}{4} \sqrt{K}; \quad б) \ d = \frac{2\sqrt{d_c}}{\sqrt[3]{K}}; \quad в) \ d = d_c = \frac{4}{\sqrt{K}}. \quad (4)$$

Формулы (4, а) и (4, б) могут быть использованы для вычисления значений d_c или d лишь при заданном значении второго диаметра; формула (4, в) применима при равенстве обоих диаметров. Поскольку значение K изменяется в весьма широком диапазоне (от 1 до 10 000 и более), значения диаметров при больших величинах K может оказаться слишком малым, чтобы дроссель мог использоваться в практических целях. Например, при $K = 10000$ ($\sqrt{K} = 100$) диаметр d составит лишь 0,04 мм.

Поэтому нужно иметь в виду, что значения каждого из диаметров дросселей d_c и d должны находиться в диапазоне от 0,4 до 1,2 мм. Дело в том, что с увеличением заданных диаметров увеличивается и расход (потребление) сжатого воздуха; при уменьшении диаметров дросселей предъявляются повышенные требования к системе очистки воздуха.

В таких случаях желательно уменьшать K до значений, соответствующих максимальному диапазону перемещения Δx заслонки (в измерительных системах в большинстве случаев $\Delta x = 0,05$ мм). Пользуясь диаграммой, приведенной на рис. 1, находим значение $\sqrt{K} \approx 6,6$, соответствующее диапазону $\Delta x = 0,05$ мм. Тогда при равенстве диаметров дросселей получим

$$d = d_c = \frac{4}{\sqrt{K}} = \frac{4}{6,6} \approx 0,6 \text{ мм.}$$

Поскольку значение K зависит от двух диаметров - d_c и d , определить значения этих диаметров можно, используя заданное (или вычисленное) значение K в одной из следующих ситуаций:

а) Задаётся один из диаметров, а второй считается постоянным и ему придается численное значение исходя из каких-либо соображений. В этом случае могут быть использованы формулы (4, а или 4, б).

б) С помощью диаграммы (см. [1, рис. 2]) может быть выбрано желательное соотношение диаметров дросселей при заданном значении K . Например, при $K = 100$ можно выбрать пары диаметров, например, $d = 0,6$ мм при $d_c \approx 0,9$ мм; $d = 0,7$ мм при $d_c \approx 1,2$ мм; $d = 0,5$ мм при $d_c \approx 0,62$ мм и т.д.

в) Диаметры d_c и d имеют одинаковые значения; величина K задана. В этом случае расчет диаметров производится по формуле (4, в). Если заданы значения Δx , x_n или x_k , то значение K определяется по одной из формул (3).

Например, для $K = 100$ получим по формуле (4, в)

$$d = d_c = \frac{4}{\sqrt{K}} = 0,4 \text{ мм.}$$

При необходимости обеспечения работы в релейном режиме значение K должно выбираться возможно большим (т.е. с минимальным значением d и максимальным значением d_c). Например, при выборе $\sqrt{K} = 100$, т.е. $K = 10000$, на диаграмме получим минимальный диапазон изменения Δx (от 0,033 до 0,05, т.е. $\Delta x = 0,017$ мм) при неизменном Δu .

Вполне возможны и другие варианты расчетов, связанные с использованием разработанных выше диаграмм (рис. 2 [1] и рис. 1). При этом следует иметь в виду, что их применение ограничено, во-первых, перечнем приведенных ранее условий и, во-вторых, невысокой точностью определения параметров элемента "сопло-заслонка" из-за недостатков графического отображения зависимостей. Однако в большинстве случаев получаемая точность вполне достаточна для ориентировочных инженерных расчетов. Кроме того, нахождение этих параметров при необходимости может дублироваться соответствующими аналитическими расчетами, хотя и снижает оперативность этих расчетов.

Основные выводы:

- на основе теоретического анализа разработана и построена диаграмма для определения диапазона изменения положения заслонки, её начального и конечного значений относительно сопла в пределах линейности при заданной относительной погрешности $\delta_y = 1 \%$;

- разработана методика определения параметров элемента "сопло-заслонка" для разных ситуаций, встречающихся в практике измерений и расчета подобных элементов; приведены примеры расчетов;

- приведены примеры типичных расчетов основных характеристик и параметров элемента "сопло-заслонка" в условиях указанных ранее ограничений;

- полученные результаты применимы и для гидравлических элементов типа "сопло-заслонка" [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зудин В.Л. Особенности статических характеристик дроссельного пневматического преобразователя // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2018.
2. Лепешкин А.В. Гидравлические и пневматические системы / А.В. Лепешкин, А.А. Михайлин. М.: Издат. центр "Академия", 2004. 336 с.

УДК 535.8

П. А. Иванов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ivanovpa@ystu.ru

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФИЛЬТРЫ КАЛМАНА В ЗАДАЧАХ РАЗЛИЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ИСКАЖЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Приводятся результаты моделирования на ПЭВМ распознавания двумерных полутонных изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям, а также межклассовое распознавание с помощью корреляционных фильтров Калмана. Приводятся данные для некоторых других типов корреляционных фильтров.

Ключевые слова: корреляционный фильтр, корреляционная функция, преобразование Фурье, оптико-электронный коррелятор.

P. A. Ivanov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ivanovpa@ystu.ru

KALMAN CORRELATION FILTERS IN PROBLEMS OF GEOMETRICALLY DISTORTED IMAGES RECOGNITION

The results of PC modeling of 2D grayscale images with geometrical deformations and several classes' recognition with the usage of Kalman invariant correlation filters are given. In addition, data is provided for some other types of correlation filters.

Keywords: correlation filter, correlation function, Fourier transform, optoelectronic correlator.

В последние годы популярным подходом к решению задачи распознавания изображений, полученных при аэрофотосъемке местности или объектов, находящихся в состоянии движения, является применение возможностей оптоэлектроники. Использование оптикоэлектронных корреляторов привлекательно, прежде всего, в связи с возможностью реализации параллельных вычислений и высокой производительностью оптики, а также в связи с наличием хорошо разработанной элементной базы как оптической, так и электронной подсистем подобного устройства. Вышеуказанные оптоэлектронные устройства осуществляют вычисление корреляционной функции предъявленного на вход объекта с эталоном, заранее записанном куда-либо (например, в базу данных), либо (для устройств реального масштаба времени) реализованных в виде голограммы.

При корреляционном распознавании изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям (поворот, сдвиг, изменение масштаба, сложное искажение формы), выходной корреляционный пик резко деградирует при самых малейших изменениях геометрии распознаваемого объекта по сравнению с эталоном (за исключением преобразования сдвига, т.к. корреляционная функция обладает автоматической инвариантностью к этому типу преобразований). Поэтому возникает вопрос о выборе эталона. Возможны различные варианты выбора эталонных объектов, довольно привлекательным вариантом выбора эталона является применение составного инвариантного корреляционного фильтра [1]. Основные алгоритмы синтеза КФ могут быть отнесены к следующим реализациям: 1) алгоритмы синтеза на основе разложений в функциональные ряды; 2) алгоритмы синтеза, в основу которых закладывается вычисление некоторого инвариантного параметра (например, средней энергии корреляции для последовательности изображений одного и того же объекта в разных состояниях); 3) алгоритмы синтеза на основе ядер интегральных преобразований. В данной работе в качестве объекта исследования использовались инвариантные корреляционные фильтры (КФ) Калмана, относящиеся ко второму классу. Были проведены эксперименты по компьютерному моделированию распознавания изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям поворота и изменению масштаба, а также межклассовому распознаванию изображений.

Рассмотрим алгоритм синтеза фильтра Калмана [2]. В основе алгоритма синтеза лежит вычисление двух функционалов:

$$X_t = \begin{bmatrix} P_{X_{t-1}} + T * V_{X_{t-1}} + \frac{1}{2} \epsilon_X T^2 \\ P_{Y_{t-1}} + T * V_{Y_{t-1}} + \frac{1}{2} \epsilon_Y T^2 \\ V_{X_{t-1}} + \epsilon_X T^2 \\ V_{Y_{t-1}} + \epsilon_Y T^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Здесь P_x, P_y – геометрическое положение (координаты) распознаваемого объекта (каждого его пиксела); V_x, V_y – скорости объекта (каждого пиксела) в зависимости от времени для последовательно предъявляемых на вход системы объектов в разных состояниях; T – время между предъявлением последовательных изображений объекта; ϵ_x, ϵ_y – среднеквадратические отклонения соответствующих координат; δ_x, δ_y – уровень шума

$$Z_t = \begin{bmatrix} P_{x_t} + \delta_{x_t} \\ P_{y_t} + \delta_{y_t} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

После вычисления функционалов строится фильтр $H = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}$.

Для каждого случая вычислялись значения корреляционных функций (3), нормированных на величину максимального пика (количественные характеристики корреляции)

$$C(x_c, y_c) = \iint_{\pm\infty} f_{sm}^*(x, y) f_{ax}(x - x_c, y - y_c) dx dy. \quad (3)$$

Здесь * – обозначает комплексное сопряжение; f и f_{ax} – эталонное (фильтр) и входное изображения, соответственно.

Распознавание изображений, подвергнутых преобразованию поворота. В качестве исходных изображений использовалась база данных объекта типа “самолет”, подвергнутых преобразованию поворота в плоскости на углы от 0 до 355° с шагом 5°, 10° и 15°, всего соответственно 72, 36 и 24 изображения. На основе указанной базы были синтезированы фильтры (для каждого случая отдельно), после чего вычислялись корреляции (корреляционные функции) всех 72-х объектов из этой же базы данных с построенными фильтрами. Типичное исходное и распознаваемое изображение представлено на рис. 1. Вычислялись величины пиков корреляции, нормированные на максимальное значение (количественные характеристики пика), а также величины отношений значения пика корреляции к отклонению от среднего (по фону корреляционной картины), и значения пика корреляции к среднеквадратическому отклонению от среднего (по фону корреляционной картины), которые обозначены как PSR_SD и PSR_AV, соответственно (качественные характеристики пика). Изображение считалось распознанным по значению порога, который принимался равным 0,5 от максимальной величины пика корреляции, как это принято, например, в [3]. График зависимости нормированной величины корреляционного пика от угла поворота представлен на рис. 2.



Рис. 1. Изображение распознаваемого объекта

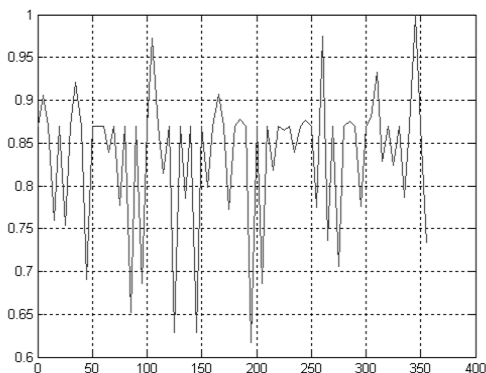


Рис. 2. График зависимости нормированной величины корреляционного пика от угла поворота (разрешение 36x36, шаг 10°)

Распознавание изображений, подвергнутых преобразованию изменения масштаба. В качестве исходных изображений использовалась база данных тех же объектов типа “самолет” (представленных на рис. 1), подвергнутых преобразованию изменения масштаба в диапазоне от -100% до +100% от первоначального с шагом 5, 10 и 15%, всего соответственно 21, 11 и 7 изображений (отдельно для увеличения и уменьшения масштаба). На основе указанной базы были также синтезированы фильтры (для каждого случая отдельно), после чего вычислялись корреляции (корреляционные функции) всех имеющихся в базе 41-го объекта с построенными фильтрами. Были вычислены те же характеристики пика, что и в случае с преобразованием поворота. График зависимости нормированной величины корреляционного пика от величины изменения масштаба (%) приведены на рис. 3.

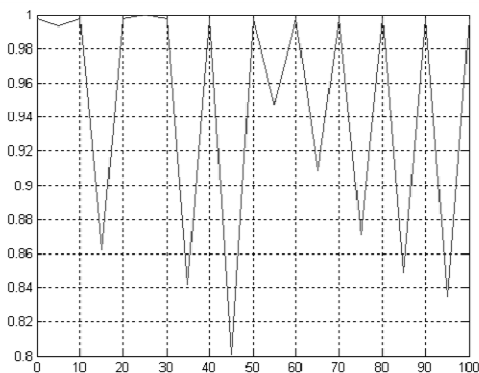


Рис. 3. График зависимости нормированной величины корреляционного пика от величины изменения масштаба (шаг 5%)



Рис. 4. Изображение “ложного” объекта

Межклассовое распознавание изображений. В качестве исходных изображений использовалась база данных, содержащих 90 “истинных” объекта типа “самолет” (т.е. подлежащих распознаванию, см. рис. 1) и 90 “ложных” объекта того же типа (т.е. подлежащих отклонению, рис. 4), подвергнутых преобразованию изменения масштаба в диапазоне от -100% до +100% от первоначального.

На основе указанной базы были синтезированы фильтры (отдельно для случая всех 144 объектов, отдельно только для 72-х “истинных” объектов), после чего вычислялись корреляционные функции всей базы из 144 объектов (“истинных” и “ложных”) с фильтрами. Вычислялись те же параметры корреляционного пика, что и в 2-х предыдущих случаях (для поворота и изменения масштаба). Коэффициенты PSR_SD и PSR_AV вычислялись отдельно для “истинных” и “ложных” изображений, критерием ошибки считались ситуации, когда значения нормированных на соответствующий максимум величин корреляции для “ложных” изображений превышали те же значения для “истинных”. График зависимости нормированной величины корреляционного пика от угла поворота (соответственно, для истинного и ложного объектов) приведены на рис. 5.

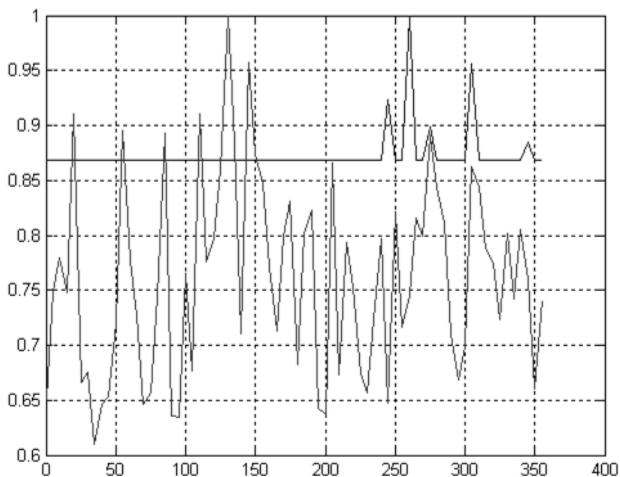


Рис. 5. График зависимости нормированной величины корреляционного пика от угла поворота (соответственно, для истинного и ложного объектов), шаг 5°

Обсуждение результатов моделирования. Применение фильтра Калмана приводит к удовлетворительным результатам по количеству ошибок для распознавания изображений, подвергнутых преобразованию поворота, при шаге угла поворота до 10° (т.е. разница в углах поворота изображений, участвовавших в генерации фильтра и предъявленных к распознаванию до 5°) и преобразованию изменения масштаба, прежде всего, в сторону уменьшения. Имеют место очень высокие качественные характеристики пика, даже при низком разрешении, при минимальном количестве ошибок. С учетом того факта, что свертка/корреляция автоматически обладает инвариантностью к сдвигу распознаваемого объекта, результаты моделирования позволяют надеяться на успешное применение данного КФ для подобного класса задач.

Применение фильтра Калмана для моделирования для межклассового распознавания изображений следует признать удовлетворительными, приведенное моделирование дает 7 ошибок, что существенно меньше реализаций, приведенных, например, в [4], однако следует учитывать, что в проведенном моделировании относительно распознавания “истинных” и “ложных” объектов рещалось в отсутствие реальных сцен, на модельных сценах.

Выводы.

1. Проведен синтез на ПЭВМ инвариантных корреляционных фильтров и приводятся результаты применения КФ Калмана для задач распознавания 2D-изображений, подвергнутых геометрическим преобразованиям поворота, изменения масштаба, а также межклассовому распознаванию таких объектов.

2. Использование указанных фильтров, приводит к удовлетворительным результатам в количественном плане, особенно для преобразования изменения масштаба.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Информационная оптика / Н.Н. Евтихийев, О.А. Евтихьева, И.Н. Компанец [и др.]. М.: Изд-во МЭИ. 2000.
2. Kumar, B. V. K. Vijaya. Tutorial survey of composite filter design for optical correlators // Appl. Opt. 1992. 31. P. 4773-4801.
3. Ivanov P.A. Comparison of correlation peaks characteristics for scaled images recognition using MACE, GMACE and MINACE filters // Proc. SPIE. 2013. Vol.8748. P.8748ON1-8748ON-6,
4. Иванов П. А. Квадратичные и полиномиальные корреляционные фильтры в задачах распознавания изображений на базе оптоэлектронных процессоров // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. Дом ЯГТУ, 2017. С. 219-227.
5. Experiments on realization of wavelet transform based on architecture of hybrid optoelectronic chip / N.N. Evtikhiev, P.A. Ivanov, A.V. Kamensky, R.S. Starikov, M.I. Zabulonov // Optical memory & neural network. 2002. Vol 11, No1. P. 39-43.

УДК 519.8

Е. Г. Казаров, А. М. Рудаков

Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
Россия, г. Ярославль, *e-mail: kvalitet@ro.ru, rudakov76loko@mail.ru*

**ВЫБОР ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНОГО ВАРИАНТА
АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ
ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ**

Предложен и апробирован алгоритм выбора предпочтительного варианта автоматизированной системы управления. На основе предложенного алгоритма, с применением теории многокритериальной функции полезности, выявлен наиболее предпочтительный вариант.

Ключевые слова: автоматизированная система управления, теория многокритериальной функции полезности, показатель, критерий, числовая шкала, вес, экспертная оценка.

E.G. Kazarov, A. M. Rydakov

Yaroslavl Higher Military School of the Air Defense
Russia, Yaroslavl, *e-mail kvalitet@ro.ru, rudakov76loko@mail.ru*

**SELECTION OF THE PREFERRED VARIANT OF THE
AUTOMATED CONTROL SYSTEM USING THE THEORY
OF THE MULTI-CRITERIA UTILITY FUNCTION**

An algorithm for choosing the preferred variant of an automated control system is proposed and tested. Based on the proposed algorithm, applying the theory of the multi-criteria utility function, the most preferable option is detected.

Keywords: automated control system, the theory of the multi-criteria utility function, index, numerical scale, weight, expert review.

Постоянное развитие и совершенствование средств воздушного нападения предполагает непрерывное совершенствование средств обнаружения и противодействия возможным угрозам. Управление средствами обнаружения и выдача достоверной информации об обнаруженных и классифицированных целях подразделениям и боевым средствам поражения осуществляется автоматизированными системами управления (АСУ). Поэтому периодически возникает задача по выбору предпочтительного варианта АСУ, разрабатываемой (модернизируемой) представителями разработчика и заказчика. Причем рассматриваемых вариантов может быть несколько.

Базируясь на ранее проведенных исследованиях [1], выбор предпочтительного варианта АСУ проведем по алгоритму, приведенному на рис. 1.

В соответствии с разработанным алгоритмом выбора предпочтительного варианта АСУ выполним ранжирование показателей, выбор основных и нормирование дополнительных показателей. К наиболее существенным частным показателям эффективности АСУ, которые в большей степени влияют на реализацию боевых возможностей войск и боевых средств, относятся следующие: боевая готовность; емкость; пропускная способность; оперативность; качество решения задач управления; помехоустойчивость; живучесть; устойчивость; скрытность; мобильность; пределы работы. Вследствие того, что показателей оценки эффективности АСУ имеется 11 наименований, возникает закономерный вопрос их ранжирования, определения основных и дополнительных показателей [2].

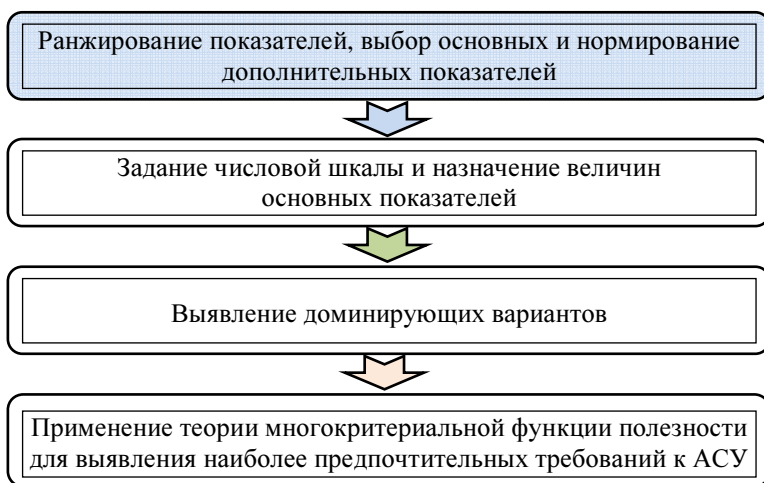


Рис. 1. Алгоритм выбора предпочтительного варианта АСУ

В соответствии с разработанным алгоритмом выбора предпочтительного варианта АСУ выполним ранжирование показателей, выбор основных и нормирование дополнительных показателей. К наиболее существенным частным показателям эффективности АСУ, которые в большей степени влияют на реализацию боевых возможностей войск и боевых средств относятся следующие: боевая готовность; емкость; пропускная способность; оперативность; качество решения задач управления; помехоустойчивость; живучесть; устойчивость; скрытность; мобильность; пределы работы. Вследствие того, что показателей оценки эффективности АСУ имеется 11 наименований, возникает закономерный вопрос их ранжирования, определения основных и дополнительных показателей [2].

Экспертное оценивание частных показателей эффективности, которые характеризуют качество функционирования АСУ в данный момент времени, было проведено двумя группами, результаты которого представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты экспертного опроса по отнесению к основным показателям оценки эффективности АСУ

Показатель эффективности	Значения вероятности	
	1 группа	2 группа
Боевая готовность	0	0
Емкость	0	0
Пропускная способность	0,2	0,1
Оперативность АСУ	0,2	0,3
Качество решения задач управления	0,1	0,3
Помехоустойчивость	0,2	0,1
Живучесть	0	0
Устойчивость	0	0
Скрытность	0,1	0
Мобильность	0	0,1
Пределы работы	0,2	0,1

Полученные противоречивые результаты были оценены по правилам Демпстера, Дезера-Смарандаке и PCR5, с рассчитанным значением коэффициента конфликтности 0,9 [3]. В соответствии с проведенной оценкой, к основным показателям эффективности АСУ следует относить пропускную способность, оперативность, качество решения задач управления, помехоустойчивость, пределы работы. Все оставшиеся следует отнести к дополнительным показателям. Показатели, отнесенные к дополнительным, задаются экспертами и в расчетах функции полезности не учитываются.

Далее, в соответствии с разработанным алгоритмом, зададим равномерную числовую шкалу для основных показателей в интервале от 0 до 10 баллов. Выявляем доминирующие варианты из имеющихся и исключаем их из дальнейшего рассмотрения.

Для выявления наиболее предпочтительного варианта АСУ из оставшихся, воспользуемся теорией многокритериальной функции полезности (рис. 2) [4].

Теория многокритериальной функции полезности MAUT (Multi-Attribute Utility Theory) предполагает выполнение групп условий, которым должна удовлетворять функция полезности для лица, принимающего решения.

Первая группа условий – аксиомы общего характера:

- установление отношения между полезностями любых альтернатив;
- условие транзитивности;
- установление соотношений между полезностями альтернатив.

Вторая группа условий – аксиомы (условия) независимости:

- независимость по разности;
- независимость по полезности;
- независимость по предпочтению.



Рис. 2. Последовательность основных этапов теории многокритериальной функции полезности

При выполнении условий аксиом общего характера и некоторых аксиом независимости можно сделать заключение о наличии многокритериальной функции полезности, являющейся аддитивной. Многокритериальную функцию полезности можно рассчитать при известных значениях одномерных функций полезности и коэффициентов важности (веса).

Для построения одномерных функций полезности четырём экспертам было предложено оценить значения показателей модернизируемой АСУ от минимально необходимых до целесообразно возможных и монотонность функций (табл. 2).

Таблица 2. Значения показателей АСУ от минимально необходимых до целесообразно возможных

Показатель эффективности	Значения	
	min	max
Пропускная способность, ед.	100	500
Оперативность, с	1	20
Качество решения задач управления	0,7	1,0
Помехоустойчивость	0,7	1,0
Пределы работы, ч	5000	10000

Из полученных данных следует, что все функции монотонны. Зависимость показателя оперативности является убывающей функцией, остальные функции возрастающие. Исходя из этого, для показателя оперативности координаты возьмем в обратном порядке, для других показателей в прямом порядке.

Строим одномерные функции полезности по полученным значениям показателей АСУ относительно десятибалльной шкалы. Полученные зависимости представлены на рис. 3–7.

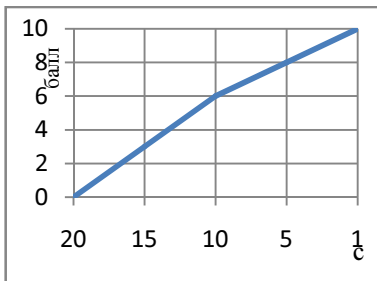


Рис. 3. Функция полезности оперативности

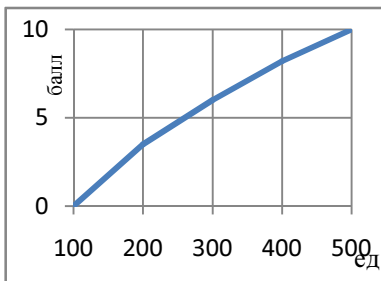


Рис. 4. Функция полезности пропускной способности

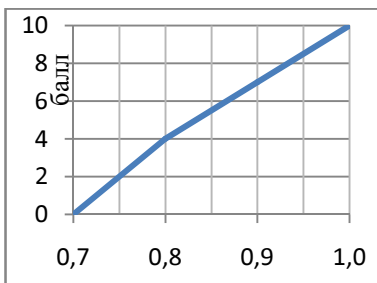


Рис. 5. Функция полезности помехоустойчивости

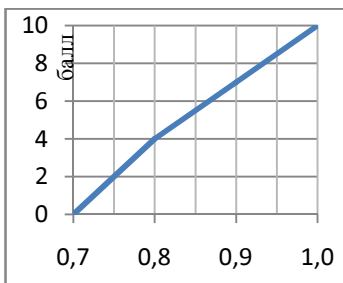


Рис. 6. Функция полезности качества решения задач

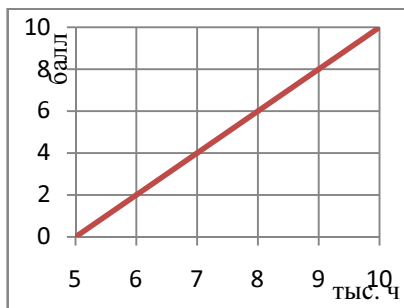


Рис. 7. Функция полезности пределов работы

Перевод размерностей показателей АСУ в балльные оценки позволяет воспользоваться теорией многокритериальной функции полезности и ранжировать критериальные значения экспертных оценок для имеющихся вариантов АСУ. Следующим шагом явилось установление экспертным методом значений коэффициентов веса оцениваемых показателей АСУ.

Полученные результаты критериальных значений экспертных оценок для возможных вариантов АСУ приведены в таблице 3.

Таблица 3. Критериальные значения экспертных оценок для имеющихся вариантов АСУ

Экспертный критерий	Экспертные критерии для альтернатив				Вес
	1	2	3	4	
Пропускная способность	8	9	7	7	0,2
Оперативность	7	9	8	8	0,1
Качество решения задач управления	9	8	7	8	0,4
Помехоустойчивость	7	6	8	9	0,2
Пределы работы	7	6	8	8	0,1

Полученные данные позволяют рассчитать величину функции полезности для возможных вариантов АСУ:

$$1 \text{ вариант } 8 \times 0,2 + 7 \times 0,1 + 9 \times 0,4 + 7 \times 0,2 + 7 \times 0,1 = 8;$$

$$2 \text{ вариант } 9 \times 0,2 + 9 \times 0,1 + 8 \times 0,4 + 6 \times 0,2 + 6 \times 0,1 = 7,7;$$

$$3 \text{ вариант } 7 \times 0,2 + 8 \times 0,1 + 7 \times 0,4 + 8 \times 0,2 + 8 \times 0,1 = 7,4;$$

$$4 \text{ вариант } 7 \times 0,2 + 8 \times 0,1 + 8 \times 0,4 + 9 \times 0,2 + 8 \times 0,1 = 8.$$

Наиболее предпочтительными, в соответствии с положениями теории полезности, являются первый и четвертый варианты. Предпочтительность вариантов выглядит следующим образом:

$$1, 4 > 2 > 3.$$

Таким образом, предложен и апробирован алгоритм выбора предпочтительного варианта АСУ. На основе предложенного алгоритма, с применением теории многокритериальной функции полезности, выявлен наиболее предпочтительный вариант АСУ.

Использование теории многокритериальной функции полезности предполагает задание лицом, принимающим решения, количественных значений критериев альтернатив вариантов решений и их весов. Изменение количественных значений альтернатив вариантов решений приводит, как правило, к другим результатам. Выбранный вариант будет "лучшим" только на данный момент и только из тех альтернатив, которые рассматриваются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаров Е.Г.* Прикладное применение правил комбинирования экспертных оценок / Е.Г. Казаров, А.М. Рудаков, А.В. Новик, Т.И. Коваленко // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 232–240.
2. Справочник офицера воздушно-космической обороны / под общ. ред. С.К. Бурмистрова. Тверь: ВА ВКО, 2005. 564 с.
3. *Казаров Е.Г.* Экспертная оценка эффективности автоматизированных систем управления с применением основных правил комбинирования / Е.Г.Казаров, А.М. Рудаков, А.В. Новик // Вестник ЯВВУ ПВО. Ярославль, 2018.
4. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах: Учебник. М.: Логос, 2000. 296 с.

УДК 62:531.3

А. Б. Капанова

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: kapanova_anna@mail.ru*

О ПРИМЕНЕНИИ ФОРМАЛИЗМА ОРНШТЕЙНА-УЛЕНБЕКА К ОПИСАНИЮ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ КАВИТАЦИИ

В работе представлен анализ зависимости параметров кинетического уравнения Фоккера-Планка от энергетических характеристик процесса формирования кавитационных сфер в проточной части регулирующего клапана.

Ключевые слова: случайный процесс, кинетическое уравнение, кавитационные пузыри, макросистема, энергетическая замкнутость, стохастическая энергия.

A.V. Kapranova

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: kapanova_anna@mail.ru*

ON THE APPLICATION OF ORNSTEIN-ULENBEK FORMALISM TO THE DESCRIPTION OF THE INITIAL STAGE OF HYDRODYNAMIC CAVITATION

The paper presents an analysis of the dependence of the parameters of the Fokker-Planck kinetic equation on the energy characteristics of the process of forming cavitation spheres in the flowing part of the control valve.

Keywords: random process, kinetic equation, cavitation bubbles, macro-system, energy closure, stochastic energy.

Нежелательные последствия явления кавитации в регулирующей арматуре трубопроводных систем [1] приводят к сбою регламентного функционирования соответствующего оборудования, его поломке и переходам в режимы работы, отличные от допустимых санитарно-экологическими нормативами. Системно-структурный анализ процесса регулирования жидкостных потоков в регулирующих клапанах является определяющим при проектировании данных устройств. Моделирование начальной стадии гидродинамической кавитации [2] входит в теоретическую базу разработки инженерной методики расчета клапанов. В последнее время все большую значимость приобретает стохастический подход при формировании математического описания появления кавитационных пузырей в проточной части регулирующей арматуры [3-6]. Различают три типа стохастических моделей образования паровых зародышей (нуклеонов): гомогенные (в потоке жидкости без твердых включений) [7, 8], гетерогенные (в потоке с взвешенными твердыми образованиями или при течениях вблизи трещин поверхностей) [9, 10] и модифицированные (гомогенные с поправочными параметрами модели, учитывающими фактор гетерогенности) [11, 12]. Однако зачастую вид функций распределения пузырей по их размерам постулируется [13] на базе экспериментальных данных.

Применение однородного стационарного марковского процесса в формализме Орнштейна-Уленбека к анализу механизма появления кавитационных пузырей в проточной части клапана позволяет смоделировать дифференциальные функции распределения числа полостей, образующихся при гидродинамической кавитации, в зависимости от их размеров. Случайный марковский процесс Орнштейна-Уленбека, характеризующий диффузионно-флуктуационные изменения состояния выделенной системы, предполагает линейную зависимость момента частоты переходов от состояния системы при сохранении постоянным второго момента [14, 15]. Пусть кавитационные сферические пузыри в указанной проточной части образуют макросистему, энергетически замкнутую по гиббсовскому ансамблю, микропараметрами которого являются гамильтоновы координаты и импульсы [16]. Заметим, что энергетическая замкнутость данной макросистемы предполагает выполнение принципа максимума энтропии (т.е. ее возрастание с последующим сохранением при равновесном состоянии макросистемы). Пусть набор фазовых переменных определяется радиусом кавитационной сферы r и скоростью ее центра масс v , тогда для $d\sigma_0$ – элемента фазового пространства σ_0 имеем

$$d\sigma_0 = dvdr . \quad (1)$$

Согласно указанным приближениям для процесса Орнштейна-Уленбека запишем уравнение Фоккера-Планка [16] со слагаемыми диффузионного и дрейфового типов, относительно равновесной функции распределения состояния $\varphi(t, r, v)$ образующихся кавитационных сфер

$$\frac{\partial \varphi(t, r, v)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + D_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \zeta_1 \frac{\partial(r\varphi)}{\partial r} + \zeta_2 \frac{\partial(v\varphi)}{\partial v}, \quad (2)$$

где D_1 и D_2 - диффузионные параметры; ζ_1 и ζ_2 - частоты образования пузырей.

Выполнив переход от вида кинетического уравнения (2) к его энергетическому представлению при условиях равенства следующих значений [4]

$$\zeta_1 = \zeta_2, \quad \zeta_1 D_1 = \zeta_2 D_2, \quad (3)$$

получим уравнение Фоккера-Планка относительно равновесной функции распределения состояния $\Phi(t, E)$ в зависимости от временного параметра t и стохастической энергии одиночного сферического пузыря E в форме [16]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{dE}{dt} \bigg|_{t_0} \left(E \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial E} \right) + \frac{1}{E_0} \frac{dE}{dt} \bigg|_{t_0} \left(E \frac{\partial \Phi}{\partial E} + \Phi \right) \quad (4)$$

или в сокращенном виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{dE}{dt} \bigg|_{t_0} \left[\frac{\partial}{\partial E} \left(E \frac{\partial \Phi}{\partial E} \right) + \frac{1}{E_0} \frac{\partial(E\Phi)}{\partial E} \right], \quad (5)$$

где $E_0 = E(t_0)$ - энергетический параметр, соответствующий энергии системы в момент ее стохастизации t_0 . В соотношениях (3) обозначено: ζ_1 и ζ_2 - коэффициенты разложения энергии пузыря E по степеням фазовых координат [5, 6]

$$E = \zeta_1 r^2 + \zeta_2 v^2, \quad (6)$$

$$\zeta_1 = \frac{2}{3} \pi (\alpha_g \rho_g + \alpha_s \rho_s) \bar{r}^3 + \frac{1}{4} k_c \zeta_{12} \rho_L \frac{1}{\bar{r}}, \quad (7)$$

$$\zeta_2 = 4\pi\sigma + \frac{1}{3} \left[8\pi P_s \bar{r} + \frac{5}{4} \pi (\alpha_g \rho_g + \alpha_s \rho_s) M^2 \frac{1}{\bar{r}^7} \right]. \quad (8)$$

В выражениях (7), (8): α_g, α_s - объемные доли газа и пара; ρ_g, ρ_s, ρ_L - плотности газа, пара и жидкости; \bar{r} - усредненный радиус кватационной сферы; k_c - параметр для энергии гидродинамического взаимодействия $E_h = k_c \Delta P / (2r)$; $\Delta P = \zeta_{12} \rho_L v^2 / 2$ - перепад давления в клапане (формула Вейсбаха); ζ_{12} - коэффициент гидравлического сопротивления для переходной зоны движения жидкости с числом Рейнольдса $10 < Re < 10^4$; M - случайная компонента ее момента импульса; P_s - давление насыщенного пара, σ - коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Из соотношений (3) и уравнения (4) следует связь между энергией E_0 , ее потоком $(dE/dt)|_{t_0}$ и параметрами из кинетического уравнения вида (2) [4]

$$E_0 = \frac{1}{2\zeta_j} \frac{dE}{dt} \Big|_{t_0}, \quad \frac{dE}{dt} \Big|_{t_0} = 4\zeta_j D_j, \quad j=1,2, \quad (9)$$

тогда согласно выражениям (7), (8) имеем

$$D_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} \pi (\alpha_g \rho_g + \alpha_s \rho_s) \bar{r}^3 + \frac{1}{4} k_\zeta \zeta_{12} \rho_L \frac{1}{\bar{r}} \right]^{-1} \frac{dE}{dt} \Big|_{t_0}, \quad (10)$$

$$D_2 = \frac{1}{4} \left\{ 4\pi\sigma + \frac{1}{3} \left[8\pi P_s \bar{r} + \frac{5}{4} \pi (\alpha_g \rho_g + \alpha_s \rho_s) M^2 \frac{1}{\bar{r}^7} \right] \right\}^{-1} \frac{dE}{dt} \Big|_{t_0}, \quad (11)$$

$$\zeta_j = \frac{1}{2E_0} \frac{dE}{dt} \Big|_{t_0}. \quad (12)$$

Построение решения $\Phi(t_0, r, v) = \tilde{\Phi}(r, v)$ кинетического уравнения формы (5) для стационарного случая

$$\tilde{\Phi}(r, v) = A_0 \exp \left[-\frac{E(r, v)}{E_0} \right] \quad (13)$$

определяется видом стохастической энергии одиночного пузыря, энергетического параметра E_0 и нормировочного коэффициента A_0 . Последний задается уравнением нормировки

$$\int_{\sigma_0} \tilde{\Phi} d\sigma_0 = 1. \quad (14)$$

Таким образом, выполнен анализ зависимости параметров кинетического уравнения Фоккера-Планка (2) от энергетических характеристик процесса формирования кавитационных сфер в проточной части регулирующего клапана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О способах оценки критических параметров кавитации в регулирующих органах при транспортировании рабочих сред / А.Б. Капранова, А.Е. Лебедев, А.М. Мельцер, С.А. Солопов, Е.М. Серов [Электронный ресурс] // Фундаментальные исследования. 2016. № 3 (ч. 3). С. 488-494. Режим доступа: <http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=40084> (дата обращения: 11.04.2016)/
2. О методах моделирования основных стадий развития гидродинамической кавитации / А.Б. Капранова, А.Е. Лебедев, А.М. Мельцер, С.В. Неклюдов, Е.М. Серов [Электронный ресурс] // Фундаментальные исследования. 2016. № 3 (ч. 2). С. 268-273. Режим доступа: <http://www.fundamental-research.ru/ru/article/view?id=40043> (дата обращения: 11.04.2016).

3. Стохастическая модель процесса образования кавитационных пузырей в прочной части регулирующего клапана / А.Б. Капранова, А.Е. Лебедев, А.М. Мельцер, С. В. Неклюдов // Вестник ИГЭУ. 2016. № 4. С. 24–29. (DOI) 10.17588/2072-2672.2016.4.024-029.
4. *Kapranova A. B.* The application process of the Ornstein-Uhlenbeck to the formation of cavitation bubbles / А.Б. Капранова, А.Е. Лебедев, S.A. Solopov, А.М. Melzer // *Czasopismotechniczne. Mechanika. Krakov, Poland, 2016. V. 113, № 2. P. 139–144.*
5. *Kapranova A.B.* The definition of the integral characteristics of the process of formation of cavitation bubbles when operating the control valve / А.Б. Капранова, А.Е. Лебедев, А.М. Melzer // *J. Chem. Eng. Process Technol. 2017. V. 8. No. 5. P. 58. (DOI) 10.4172/2157-7048-C1-009.*
6. Determination of the average parameters of cavitation bubbles in the flowing part of the control valves / А. Капранова, А. Лебедев, А. Melzer, S. Neklyudov // *International Journal of Mechanical Engineering & Technology (IJMET). 2018. Vol. 9, Issue 3, March. P. 25–31; Article ID: IJMET_09_03_003 Available online at <http://www.iaeme.com/IJMET/issues.asp?JType=IJMET&VType=9&ITType=3>, ISSN Print: 0976-6340 and ISSN Online: 0976-6359*
7. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1959. 586 с.
8. *Lienhard J.H.* Homogeneous nucleation and the spinodal line / J. H. Lienhard, A. Karimi // *Journal of Heat Transfer. 1981. V. 103, No.1. P. 61–64.*
9. *Bankoff S. G.* Entrapment of gas in the spreading of a liquid over a rough surface // *AIChE Journal. 1951. V. 4. P. 24–26.*
10. *Hsu Y. Y.* On the size range of active nucleation cavities on a heating surface / Y. Y. Hsu // *Journal of Heat Transfer. 1962. V. 94. P. 207–212.*
11. *Alamgir Md.* Correlation of pressure undershoot during hot-water depressurization / Md. Alamgir, J. H. Lienhard // *Journal of Heat Transfer. 1981. V. 103, No.1. P. 52–55.*
12. *Ellas E.* Bubble transport in flashing flow / E. Ellas, P.L. Chambre // *Int J. Multiphase Flow. 2000. No. 26. P. 191–206.*
13. Кумзерова Е.Ю. Численное моделирование нуклеации и динамики пузырьков при быстром падении давления жидкости / Е.Ю. Кумзерова, А.А. Шмидт // *Журн. техн. физики. 2002. Т. 2(7). С. 36–40.*
14. *Кайзер Дж.* Статистическая термодинамика неравновесных процессов / пер. с англ. А.Г. Башкирова; под ред. В. Г. Морозова. М.: Мир, 1990. 608 с.
15. *Рёнке Г.* Неравновесная статистическая механика / пер. с нем. С.В. Тищенко под ред. Д. Н. Зубарева. М.: Мир, 1990. 320 с.
16. *Климонтович, Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем. М.: ЛЕНАНД, 2014. 328 с.

УДК 625.7/8

Ю. А. Комиссарова, В. М. Дудин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: iu.komissarova2014@yandex.ru

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТВЕРДЫХ ХИМИЧЕСКИХ ПРОТИВОГОЛОЛЕДНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА БЕЗОПАСНОСТЬ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

В статье рассматривается влияние применения твердых химических противогололедных материалов на безопасность автомобильных дорог. Приведены результаты измерения коэффициента сцепления. Рассмотрены наиболее распространенные реагенты.

Ключевые слова: зимняя скользкость, противогололедный материал, коэффициент сцепления.

Y. A. Komissarova, V. M. Dudin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: iu.komissarova2014@yandex.ru

INFLUENCE OF APPLICATION OF SOLID CHEMICAL ANTI-ICING REAGENTS ON SAFETY OF ROADS

The article considers the influence of the use of solid chemical anti-icing reagents on the safety of highways. We give results of measuring the coefficient of adhesion. The most common reagents are considered.

Keywords: winter slipperiness, anti-icing material, coefficient of adhesion.

Зимнее содержание дорог представляет собой комплекс мероприятий, включающий защиту дорог от снежных заносов, очистку дорог от снега, борьбу с зимней скользкостью, борьбу с наледями. При организации мероприятий зимнего содержания важной задачей является выбор способов, средств и методов, обеспечивающих нормативные значения эксплуатационных показателей покрытий (чистота, ровность, коэффициент сцепления) и оказывающих при этом минимальное негативное воздействие на окружающую среду и человека.

Зимняя скользкость включает в себя все виды снежно-ледяных образований на поверхности дороги, приводящие к снижению коэффициента сцепления: различные виды естественного обледенения, которые в метеорологии объединяют понятием гололедицы, и искусственное обледенение в виде снежного наката.

Коэффициент сцепления - это отношение результирующей реакции, возникающей в опорной плоскости касания колеса с поверхностью, к соответствующему значению нормальной нагрузки, действующей на колесо.

Сцепление между колесом автомобиля и дорогой снижается при увеличении скорости движения. Наибольшее влияние на коэффициент сцепления оказывают: комплексное действие повышения влажности дорожного покрытия и скорости движения. Данные факторы приводят к увеличению длины тормозного пути и нарушению устойчивости автомобиля.

При экстренном торможении на скользких покрытиях тормозной путь автомобиля может увеличиваться в 3,5 раза по сравнению с аналогичным торможением на дорожных покрытиях с высоким коэффициентом сцепления, при этом значительно снижается устойчивость автомобиля.

Для разрушения льда и снега на дорогах используются различные методы. Самыми распространенными методами являются: химический, фрикционный и механический. Наиболее эффективным является химический метод. Он предусматривает использование разных химических противогололедных материалов (ПГМ) для удаления или предотвращения образования скользкости на дорожном покрытии.

Химический метод борьбы с зимней скользкостью подразумевает использование твердых и жидких химических реагентов (рис. 1). Химические реагенты в дорожном хозяйстве - это твердые, жидкие или сыпучие химические вещества, которые распределяют по дорожному покрытию для борьбы с зимней скользкостью. Вещества, входящие в состав реагентов, имеют сложную химическую структуру. Реагенты, вступающие в реакцию со снегом и льдом, растворяют их и образуют водно-соляной раствор.



Рис. 1. Классификация противогололедных материалов

Все химические противогололедные реагенты должны [1–3]:

- 1) понижать температуру замерзания;
- 2) вызывать таяния льда на дороге;
- 3) не увеличивать скользкость обработанных покрытий;
- 4) быть технологичными в хранении, транспортировке и применении;
- 5) быть безопасными в использовании и безвредными для окружающей среды.

В ЯГТУ в течение нескольких месяцев были проведены испытания для выявления лучшего химического твердого противогололедного реагента. Реагенты, участвующие в опыте, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Химические ПГМ

Название ПГМ	Химический состав
Ультра	Хлористый натрий NaCl_2 (модифицированный) 75-80% Хлористый кальций CaCl_2 (гранулы) 15-25%
Минеральная соль	NaCl
Экороуд	Хлористый кальций (CaCl_2) 40% Хлористый натрий (NaCl_2) 58% ингибиторы коррозии. 2%
НКММ	Нитрат кальция $\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$ 20% Нитрат магния $\text{Mg}(\text{NO}_3)_2$ 18% Мочевина $(\text{NH}_2)_2\text{CO}$ 60%
Галит	Хлористый натрий NaCl_2 98% Мин. примеси 2%

Расходы реагентов изменяются в зависимости от температуры окружающей среды. Они приведены в табл. 2.

Таблица 2. Расходы противогололедных реагентов (в $\text{г}/\text{м}^2$)

Название реагента / Температура	0...-5°C	-6...-10°C	-11...-15°C	-16...-20°C
Ультра	40	45	50	55
Минеральная соль	20	30	40	50
Экороуд	15	20	25	30
НКММ	30	35	40	45
Галит	20	30	40	50

Суть эксперимента заключалась в измерении коэффициента сцепления в разных погодных условиях и видах скользкости. Прибором для измерения коэффициента сцепления является ППК-МАДИ (рис. 2).

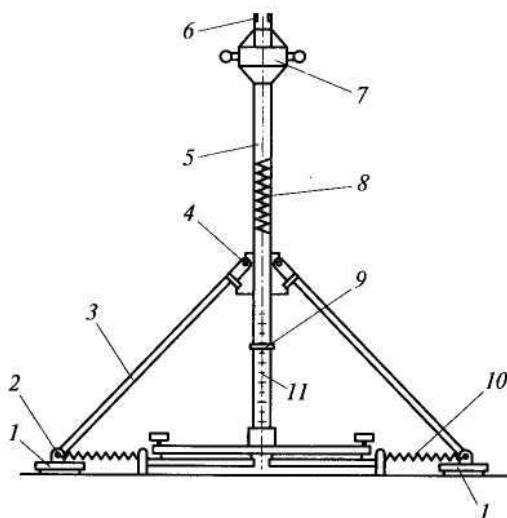


Рис. 2. ППК-МАДИ:

- 1 - имитаторы; 2 - шарнир; 3 - тяга; 4 - подвижная муфта;
 5 - опорная штанга; 6 - устройство сброса груза; 7 - груз;
 8 - центральная пружина; 9 - регистрирующая шайба;
 10 - стягивающая пружина; 11 - шкала коэффициентов сцепления

Порядок эксперимента:

- прибор устанавливается на оцениваемое дорожное покрытие таким образом, чтобы имитаторы возвышались над поверхностью на 10-12 мм.

- на покрытие под имитаторами распределяли реагент и при помощи устройства сбрасывали груз, который передавал ударный импульс имитаторам.

- коэффициент сцепления фиксировался на шкале при помощи измерительной шайбы через 5 минут после распределения реагентов.

Результаты эксперимента приведены в табл. 3.

Таблица 3. Результаты эксперимента

Реагент / Температура	-15°C	-10°C	-5°C	-3°C
Покрытие без реагента	0,13	0,10	0,08	0,06
Ультра	0,11	0,08	0,05	0,13
Минеральная соль	0,14	0,09	0,07	0,10
Экороуд	0,16	0,18	0,20	0,12
НКММ	0,15	0,16	0,14	0,03
Галит	0,14	0,10	0,09	0,08

По полученным результатам были построены графики, представленные на рис. 3–7.

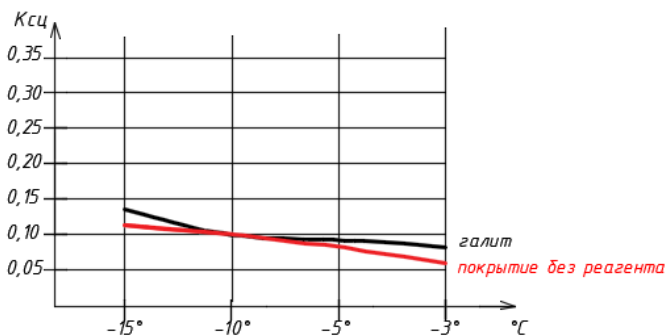


Рис. 3. Результаты эксперимента с реагентом Галит

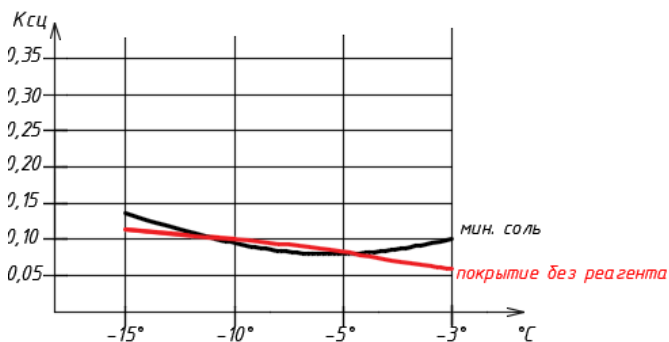


Рис. 4. Результаты эксперимента с реагентом - минеральная соль

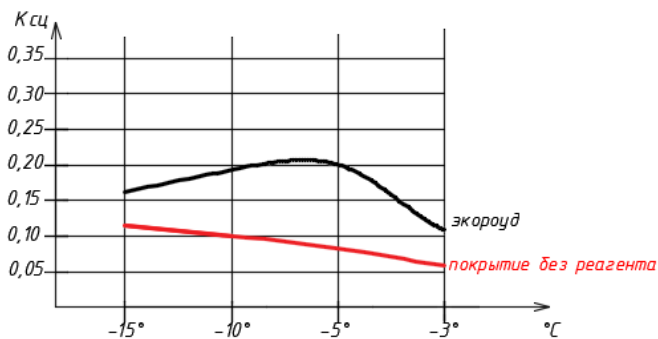


Рис. 5. Результаты эксперимента с реагентом Экороуд

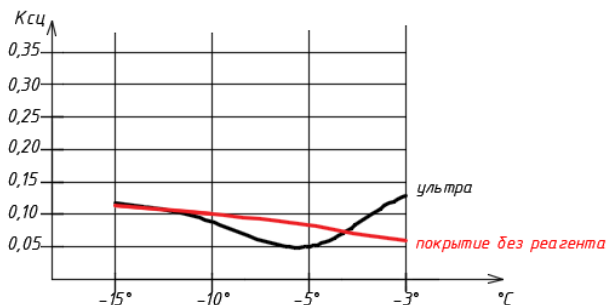


Рис. 6. Результаты эксперимента с реagenтом Ультра

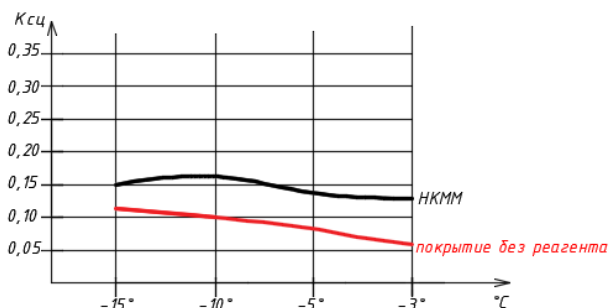


Рис. 7. Результаты эксперимента с реagenтом НКММ

Противогололедный реagenт галит при средних температурах не проявляет своих свойств, его лучше использовать при низких и высоких температурах.

При температуре от минус 10 до минус 5 $^{\circ}\text{C}$ при обработке дорог минеральной солью, коэффициент сцепления становится меньше исходного. Данный реagenт работает лучше при низких температурах – от минус 4 $^{\circ}\text{C}$ и при высоких – минус 11 $^{\circ}\text{C}$. Данный реagenт лучше применять при низких и высоких значениях температуры.

При использовании противогололедного реagenта Экороуд, значение коэффициента сцепления значительно выше исходного. Максимальный коэффициент сцепления достигается в диапазоне от минус 5 $^{\circ}\text{C}$ до минус 10 $^{\circ}\text{C}$. Однако при температуре, приближающейся к 0 $^{\circ}\text{C}$, Экороуд начинает терять свойства и коэффициент сцепления близится к исходному. Данный реagenт лучше применять при средних значениях температуры.

При использовании противогололедного реagenта Ультра наблюдается высокий показатель коэффициента сцепления при минимальных температурах. При средних температурах коэффициент сцепления хуже, чем у других образцов.

Противогололедный реагент НКММ показывает высокие значения коэффициента сцепления при любых температурах, его можно использовать на дорогах на протяжении всего зимнего времени.

Таким образом, проведённые в ЯГТУ экспериментальные исследования противогололедных материалов, которые широко применяются для содержания автомобильных дорог в Ярославской области, показали, что выбор марки реагента зависит от множества факторов, и однозначно рекомендовать к использованию тот или иной противогололедный материал достаточно затруднительно. Поэтому требуется проведение дальнейших исследований с целью оптимизации выбора таких материалов для содержания автомобильных дорог.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ОДН 218.2.027-2003. Требования к противогололедным материалам.
2. Противогололедные материалы [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.StudFiles.ru/preview>.
3. Противогололедные материалы [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.kps-k-com>.

УДК 678.017

Д. В. Куделин¹, Т. Н. Несиоловская²

¹ООО «Научно-технический центр «Интайр»

Россия, г. Ярославль, *e-mail: kvmbaikal@yandex.ru*,

²Ярославский государственный технический университет

Россия, г. Ярославль, *e-mail: nesiolovskayatn@ystu.ru*

АНАЛИЗ НДС ПЛОСКОЙ РЕЗИНОВОЙ МЕМБРАНЫ В СЛОЖНОНАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Рассматривается методика анализа напряженно-деформированного состояния резиновой мембраны на основе каучука СКИ-3 при продавливании её шарообразным индентором.

Ключевые слова: *резиновая мембрана, сложнапряженное состояние, метод конечных элементов, индентор, контактное нагружение.*

D. V. Kudelin¹, T. N. Nesiolovskaya²

¹«R&D Center «Intire» LLC

Russia, Yaroslavl, *e-mail: kvmbaikal@yandex.ru*,

²Yaroslavl State Technical University

Russia, Yaroslavl, *e-mail: nesiolovskayatn@ystu.ru*

THE ANALYSIS OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE PLANE RUBBER MEMBRANE IN THE COMBINED STRESS CONDITION

A technique of analysis the stress-strain state of a rubber membrane based on SKI-3 rubber is considered when it is indented by a spherical indenter.

Keywords: *The rubber membrane, a complex stress-strain state, finite element analysis, indenter, contact loading.*

Анализ напряженно-деформированного состояния изделий стал неотъемлемой составляющей процесса проектирования, в том числе и в промышленности РТИ. Данный вид расчетов, основанный на методе конечных элементов, позволяет в сравнительно короткие сроки выявить наиболее нагруженные зоны конструкции, а также проанализировать влияние различных материалов на технические свойства изделий до создания опытных партий.

Большой группой тонкостенных резинотехнических изделий являются резиновые мембраны, специфика свойств которых обуславливает широкий спектр применяемых для их изготовления каучуков и ингредиентов. Основной проблемой при проектировании мембран является правильный выбор полимера для конечной рецептуры, т.к. в большинстве случаев мембраны эксплуатируются в сложных условиях нагружения, что приводит к разнообразию зон и характера потенциальных разрушений, проявляющихся в процессе эксплуатации изделий.

При разработке новых рецептур мембран, чаще всего, применяют стандартные методы определения физико-механических характеристик резин, большинство из которых предполагают испытание материала в условиях простого одноосного растяжения-сжатия. В то же время в реальных условиях эксплуатации эластомерная составляющая мембран, воспринимающая внешние нагрузки, находится в условиях сложноподвижного состояния. Это несоответствие испытательных методов и условий работы изделий существенно усложняет анализ их поведения в процессе эксплуатации.

Сложноподвижное состояние резиновой мембраны предложено реализовывать путем её продавливания стальным полированным шарообразным индентором с помощью реверсивной приставки к разрывной испытательной машине (рис. 1) [1]. Выбор метода был обусловлен следующими критериями:

- условия нагружения образца должны отражать реальные условия нагружения изделия;
- на одном типе образца можно определить деформационные, а также предельные характеристики материала;
- испытания можно проводить на существующем стандартном оборудовании с применением недорогих адаптированных приставок;

- условия испытания должны обеспечить высокую точность и достоверность результатов.

Подобный метод нагружения описан в работе М.К. Хромова [2], но с применением инденторов небольшого диаметра (до 8 мм), что приводит к прорыву образца в предельном состоянии. Для того чтобы избежать этого вида разрушения, в настоящей работе использовался индентор диаметром 27 мм, позволяющий образцу растягиваться по поверхности шарообразного индентора [3].

Образцы для испытания представляли собой круглую мембрану с диаметром рабочего участка 65 мм и толщиной 1 мм.

Объектами исследования в работе являлись резины на основе каучуков СКИ-3, СКМС-30АРК и БНКС-28, наполненные 40 мас.ч. активного технического углерода N339, резины, широко использующиеся для производства резиновых мембран.

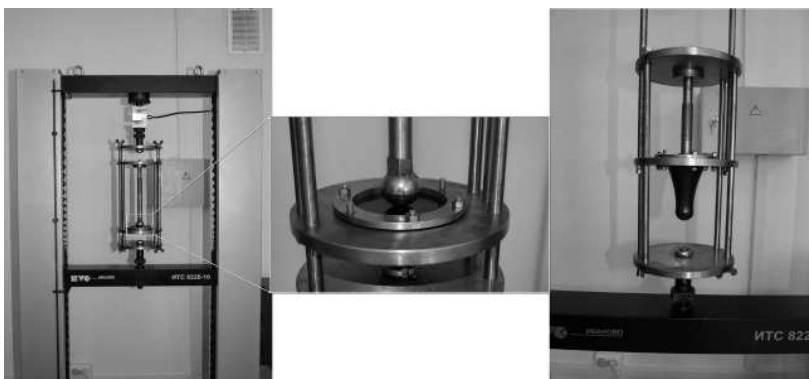


Рис 1. Устройство для определения физико-механических свойств резин в условиях сложнапряжённого состояния

Индентирование мембраны позволяет реализовать неоднородное напряженно-деформированное состояние, поэтому определить абсолютные значения физико-механических показателей на основании только экспериментальных данных не представляется возможным. По этой причине в работе использовался комплексный подход к моделированию, сочетающий экспериментальные исследования и расчетный метод посредством пакета для конечно-элементного анализа. Экспериментальная работа включала в себя получение кривой «напряжение – удлинение» при одноосном растяжении для расчета параметров упругого потенциала Йоха, представляющего собой разумный компромисс между точностью аппроксимации деформационной кривой и устойчивостью в различных напряженно-деформированных состояниях [4], и индентирование резиновой

мембраны до разрушения с целью получения значений максимальных перемещений индентора [5]

$$F = \sum_{i=1}^3 C_{i0} (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{D_i} (J_{el} - 1)^{2i}, \quad (1)$$

где \bar{I}_1 – первый девиаторный инвариант тензора деформации;

J_{el} – упругая объёмная кратность деформации;

C_{i0} – константы, характеризующие свойства материала;

D_i – параметр, характеризующий объёмную сжимаемость материала.

Решение задачи о напряжённо-деформированном состоянии резинового образца в виде плоского диска, закреплённого по внешнему периметру и продавливаемого в центре сферическим индентором, осуществлялось методом конечных элементов в осесимметричной постановке.

Для проведения расчёта экспериментальные зависимости «напряжение-деформация», полученные при одноосном растяжении, аппроксимировались рядами ортогональных многочленов Лежандра.

Используя экспериментальные массивы напряжения f_i и деформации λ_i методом наименьших квадратов для каждого испытанного образца, вычислялись оценки параметров полинома Лежандра L_i . На основании вычисленных коэффициентов полинома Лежандра вычисляются параметры потенциала Йоха ($C1$, $C2$ и $C3$), применяемого в пакете для конечно-элементного анализа.

Деформированное состояние при различных значениях коэффициента трения и перемещения индентора оценивали по инвариантам тензора деформации I_1 и I_2 [5, 6].

Напряжённое состояние оценивалось по значению критерия Мизеса [5-7], а также по инвариантам тензора напряжений S_1 и S_2 .

Для того чтобы сопоставить результаты конечно-элементного расчёта с прочностью при одноосном растяжении, использовалась функция из теории прочности [5, 8] следующего вида (2):

$$F(S_1, S_2) = aS_1 + (1 - a)S_2 = C, \quad (2)$$

где a и C – экспериментально определяемые коэффициенты:

$a = \frac{S_2}{(f_p + S_2 - S_1)}$ – характеризует относительный вклад первого инварианта (нормальных напряжений) в прочность, соответственно $(1-a)$ характеризует стойкость к касательным напряжениям;

$C = f_p a$ – характеризует абсолютную прочность материала, где f_p – условная прочность при одноосном растяжении, МПа.

Результаты расчёта позволили проанализировать распределение напряжений и деформаций в мембране и выявить наиболее опасные зоны сечения.

Степень неоднородность НДС оценивали по величине стандартных отклонений значений главных напряжений (рис. 2). Максимальной степенью неоднородности обладают резины на основе каучука СКМС-30АРК. Степень неоднородности вулканизатов БНКС-28 на ~ 60% ниже. Минимальным значением данного показателя обладают резины на основе каучука СКИ-3, уступая резинам на основе СКМС-30АРК более 70%.

При индентировании мембраны возникает трение между поверхностью образца и индентором. Так как величина силы трения сказывается на результатах испытаний, важно было установить влияние трения на распределение напряжений в мембране на различных стадиях внедрения индентора (рис. 3).

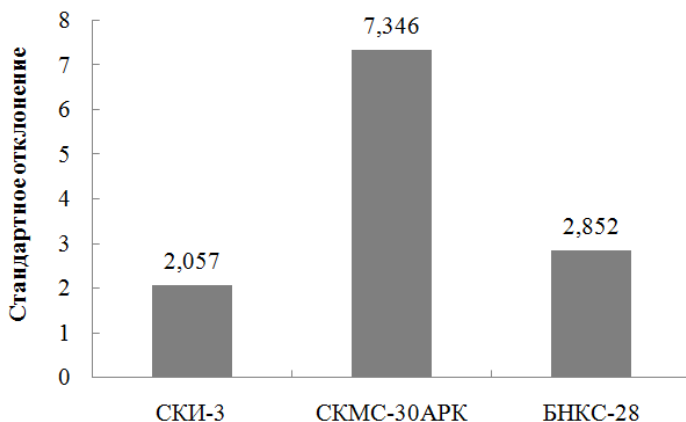


Рис. 2. Стандартные отклонения значений главных напряжений исследованных резин

Показано, что при небольших значениях коэффициента трения ($\mu = 0,2-0,4$) зона максимальной концентрации напряжений находится под индентором. При увеличении коэффициента трения μ с 0,6 до 0,8 (что соответствует реальности), по мере внедрения индентора, происходит перераспределение напряжений. Возникает другая зона опасного сечения, находящаяся на периферии образца в месте, где индентор теряет контакт с мембраной. Учитывая, что конечно-элементная модель является двухмерной, в трехмерном измерении эта область будет представлять из себя кольцо. Образование отверстия при разрушении мембран подтверждает корректность проведенного расчета (рис. 4). Стоит отметить, что характер разрушения мембран, как и при расчете, оказался индифферентен по отношению, к типу эластомера.

Анализ функции (2) позволил выявить различия в поведении резин при одноосном растяжении и контактном нагружении (табл. 1). В сложно-

напряженном состоянии резины на основе кристаллизующегося каучука СКИ-3 теряют свое преимущество по прочностным свойствам (коэффициент С) перед резинами на основе СКМС-30АРК и БНКС-28.

Вулканизаты СКИ-3 в сложнапряженном состоянии обладают низкой стойкостью к касательным напряжениям (параметр «1-а»), соответственно процессы ориентационного упрочнения перестают играть приоритетную роль в формировании свойств резин на основе данного полимера. При этом режим нагружения мало сказывается на поведении резин на основе СКМС-30АРК и БНКС-28. Таким образом, испытания резин в сложнапряженном состоянии позволяют повысить качество процесса рецептуростроения за счет получения корректной информации о свойствах полимеров, определенных в условиях близких к эксплуатационным.

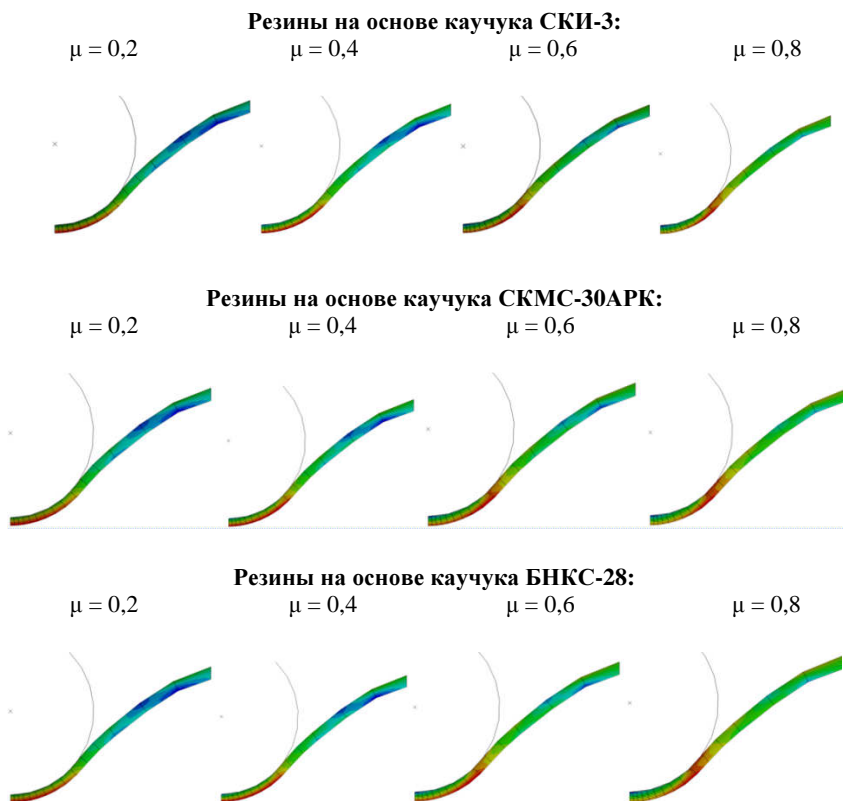


Рис. 3. Распределение напряжений в мембране в зависимости от коэффициента трения

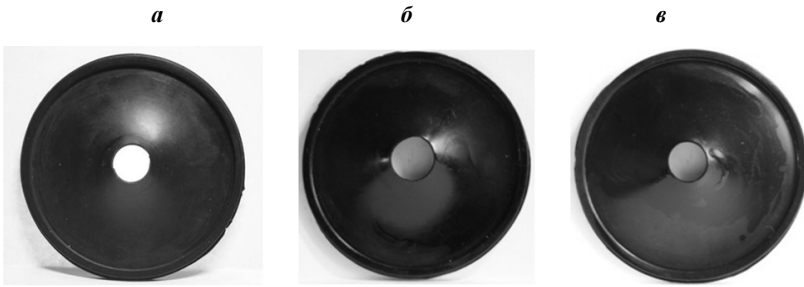


Рис. 4. Характер разрушения мембран:
 Тип каучука: *a* - СКИ-3; *б* - БНКС-28; *в* - СКМС-30АРК

**Таблица 1. Результаты анализа напряженного состояния резин в сложна-
 напряженном состоянии**

Показатель	СКИ-3	СКМС-30АРК	БНКС-28
Эксперимент (одноосное растяжение)			
Условная прочность при растяжении f_p, МПа	22,3	21,9	20,8
Расчет (индентирование мембраны)			
Инв. тенз. напр. S_1	8,84	41,24	22,29
Инв. тенз. напр. S_2	17,91	359,85	111,63
a	0,571	1,057	1,014
$1 - a$	0,429	-0,057	-0,014
C	12,731	23,144	21,081

Далее рассмотрим деформационные характеристики резин (табл. 2). Зона 1 - область непосредственно под индентором, Зона 2 - область потери контакта между мембраной и индентором.

Величина трения сказывается и на значениях инвариант тензора деформации. Ранее было отмечено, что при увеличении коэффициента трения наблюдается перераспределение напряжений в мембране. Аналогичная зависимость отмечается и для инвариантов тензора деформации. При небольших значениях μ деформации в зоне 1 выше, чем в зоне 2. При увеличении μ до 0,8 картина меняется на противоположную. Максимальные деформации оказываются в зоне потери контакта между индентором и мембраной. Кроме того стоит отметить, что максимальными значениями деформаций при равном перемещении индентора (50 мм) обладают резины на основе каучука СКМС-30АРК.

Таблица 2. Значения инвариант тензора деформации I_1 и I_2

Коэффициент трения, μ	СКИ-3		СКМС-30АРК		БНКС-28	
	Зона 1	Зона 2	Зона 1	Зона 2	Зона 1	Зона 2
	Первый инвариант тензора деформаций I_1					
0,2	2,151	1,096	4,585	0,719	2,862	0,919
0,8	0,310	1,436	0,248	1,336	0,277	1,402
	Второй инвариант тензора деформаций I_2					
0,2	1,513	0,204	6,459	0,101	2,612	0,153
0,8	0,030	0,315	0,019	0,285	0,024	0,306

Таким образом, испытания резин в сложнапряженном состоянии позволяют повысить качество процесса рецептуростроения за счет получения корректной информации о свойствах полимеров, определенных в условиях близких к эксплуатационным. Удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных позволяет судить о правильности выбранного подхода к моделированию напряженно-деформированного состояния мембран, позволяющего также понять причины и кинетику накопления дефектности материала, выяснить возможности управления процессами, вызывающими максимальное повреждение материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Несиоловская Т.Н. Комплексный подход к проектированию тонкостенных резиновых изделий / Т.Н. Несиоловская, Д.В. Куделин // Науч.-техн. вестник Поволжья. Казань, 2012. № 2. С. 229-233.
2. Хромов М.К. Исследования разрушения резин при прорыве / М.К. Хромов, Н.А. Богомолова, В.И. Андреев // Каучук и резина. 1973. № 10. С. 25-28.
3. Несиоловская Т.Н. Оценка прочностных свойств тонкостенных резиновых изделий в условиях слождеформированного состояния / Т.Н. Несиоловская, А.Б. Ветошкин, Д.В. Куделин // Изв. вузов. Химия и хим. технология. 2012. Т. 55, № 7. С. 97-100.
4. Yeoh O.H. Some Forms of the Strain Energy Function for Rubber // Rubber Chemistry and Technology, 1993. V. 66. P. 754-771.
5. Куделин Д.В. Моделирование процесса нагружения резиновой мембраны шарообразным индентором / Д.В. Куделин, Т.Н. Несиоловская // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. С. 135-140.
6. Соловьев М.Е. Теория и задачи механики сплошных сред с пакетом wxMaxima: учебное пособие. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2014. 236 с.
7. Викарио А. Критерий прочности и анализ разрушения конструкций из композитных материалов. Анализ и проектирование конструкций / А. Викарио, Р. Толанд // М.: Мир, 1978. Т. 7, Ч. 1. С. 62-107.
8. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Будівельник, 1982. 280 с.

УДК 625.7/8

А. А. Курныгина, В. М. Дудин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: a.kurnygina@yandex.ru, dudinvm@ystu.ru

ВЛИЯНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ФРИКЦИОННЫХ ПРОТИВОГОЛОЛЕДНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА БЕЗОПАСНОСТЬ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

Рассмотрено влияние фрикционных материалов на безопасность дорог зимой. Приведены результаты опытов.

Ключевые слова: дорога, зимняя скользкость, песок, щебень, коэффициент сцепления.

A. A. Kurnygina, V. M. Dudin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: a.kurnygina@yandex.ru, dudinvm@ystu.ru

INFLUENCE OF APPLICATION OF FRICTIONARY HYGIENE MATERIALS ON SAFETY OF AUTOMOBILE ROADS

We consider the influence of friction materials on road safety in winter. The results of experiments are presented.

Keywords: road, winter slipperiness, sand, gravel, coefficient of adhesion.

Каждый год в зимние периоды времени дорожные службы сталкиваются с такой проблемой как зимняя скользкость [1–3]. Зимняя скользкость – это снежные и ледовые отложения, образующиеся на дороге при отрицательных температурах. Чаще всего, это такой вид скользкости, как рыхлый снег, снежный накат, гололед. Скользкость на дорогах становится причиной дорожно-транспортных происшествий зимой, так как она приводит к уменьшению коэффициента сцепления колеса с дорожным покрытием, увеличению тормозного пути и появлению опасности блокирования колес, и заносу.

В практике зимнего содержания существуют несколько методов борьбы с этой проблемой. Одним из таких методов является фрикционный метод.

Фрикционный способ является одним из основных способов уменьшения отрицательного действия зимней скользкости. Сущность его состоит в том, что по поверхности дороги, покрытой слоем льда и снега, рассыпают фрикционные материалы мелких фракций. Этот способ полностью не устраняет скользкость, но значительно увеличивает сцепление ко-

леса с покрытием. Материалы, используемые в этом способе, делятся на две группы. Первая группа – естественные материалы, к которым относятся песок, песчано-гравийная смесь и гравий мелкой фракции. Вторая группа – искусственные материалы, к которым относится зола уноса, мелкая фракция шлака и другие материалы. Максимальный размер фракции должен быть не более 5-6 мм, а сам материал не должен содержать частиц глины более чем 15%.

Действие различных фрикционных материалов может отличаться в зависимости от температуры воздуха и видов скользкости. Чтобы сравнить действие различных материалов был проведен ряд натурных экспериментов.

В течение нескольких зимних месяцев в ЯГТУ проводились экспериментальные исследования. Суть испытаний согласно с ГОСТ 33078-2014 [4] заключалась в том, чтобы измерить коэффициент сцепления на различных видах скользкости при разных температурах с фрикционными материалами разных фракций, сравнить их и выявить наиболее лучший материал и проверить материал на длительность действия. В качестве испытуемого материала использовались мраморная крошка, зола уноса, а также песок крупностью 1 мм, 0,5 мм и 0,25 мм.

Измерения проводились с помощью прибора для измерения сцепления ППК МАДИ (рис. 1). Испытания проводились следующим образом: устанавливали прибор ППК-МАДИ на оцениваемое дорожное покрытие таким образом, чтобы его имитаторы возвышались над поверхностью на 10...12 мм. Затем покрытие под имитаторами обрабатывали фрикционными материалами, и при помощи устройства сбрасывали груз, который скользил по направляющей штанге и ударялся о муфту. Через толкающие штанги и шарниры ударный импульс передается имитаторам, в результате чего последние взаимодействовали с дорожным покрытием. Коэффициент сцепления фиксировался на шкале прибора при помощи измерительной шайбы.



Рис. 1. Порядок установки прибора ППК МАДИ

По результатам экспериментов был построен график, на котором наглядно показано, как изменяется коэффициент сцепления шины с дорогой с разными материалами и при разных температурах воздуха (рис. 2).

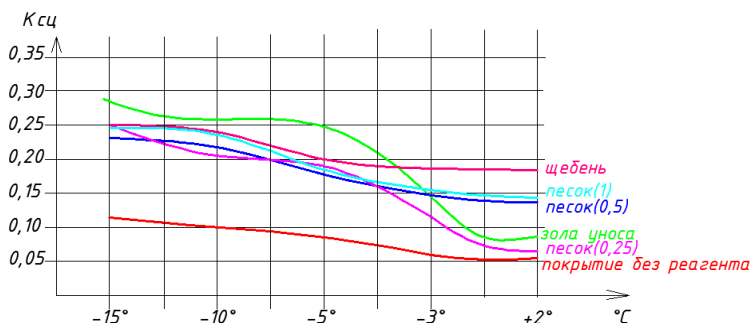


Рис. 2. Зависимости коэффициента сцепления от температуры наружного воздуха для различных фракций противогололёдного фрикционного материала

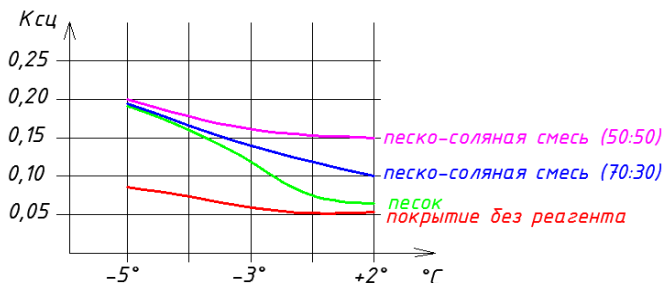


Рис. 3. Сравнение эффективности песка и песко-соляной смеси

Исходя из проведенных исследований, можно сделать несколько выводов:

1. Коэффициент сцепления повышается с понижением температуры воздуха;
2. Фрикционные материалы легко разносимы. При проведении испытания было выявлено, что песок и щебень достаточно быстро разносятся с дороги и поэтому время действия не превышает 1-2 часов.

Для того чтобы увеличить действия фрикционных материалов, необходимо смешать их с солью, образуя песко-соляную смесь. Из рис. 3 видно, что коэффициент сцепления при добавлении соли увеличивается или остается таким же. Такие смеси не только повышают коэффициент сцепления, но и уменьшают отрицательное воздействие соли на окружающую среду.

Фрикционный способ имеет несколько преимуществ. Это простота в использовании, экономичность (в сравнении с другими способами) и минимальное отрицательное воздействие на движущиеся автомобили.

Несмотря на все плюсы, у данного метода очень много недостатков. Во-первых, материал, рассыпанный на дорогу, хоть и повышает коэффициент трения и уменьшает тормозной путь, задерживается на дороге на очень короткое время. После проезда нескольких автомобилей состояние покрытия снова ухудшается. Обычно материал задерживается на дорожном покрытии около 30 минут. Во-вторых, весь распределенный материал не остается на месте, а чаще всего сдувается ветром, переносится колесами, сносится завихрениями после проезда автомобиля. Поэтому для восстановления сцепных свойств требуется частая посыпка и большое количество специализированных машин. Также большой проблемой является хранение всех материалов, так как чаще всего они смерзаются. Еще одной проблемой является то, что твердые материалы очень засоряют водосточные сооружения. Из-за этого во многих крупных городах запретили использовать песчаные смеси для уменьшения скользкости, так как в весенний период много средств тратилось на прочистку водостоков и водоотводных лотков.

Таким образом, фрикционный метод борьбы с зимней скользкостью целесообразно применять на дорогах III-V категории, а также на дорогах, расположенных в регионах с продолжительными устойчивыми низкими температурами от минус 20 °С до минус 25 °С, и на участках дороги, где использование отдельных химических противогололедных материалов запрещено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руководство по борьбе с зимней скользкостью на автомобильных дорогах: отраслевой дорожный методический документ. М., 2003.
2. ГОСТ 33181-2014. Дороги автомобильные общего пользования. Требования к уровню зимнего содержания.
3. ОДМ 218.8.002-2010. Методические рекомендации по зимнему содержанию автомобильных дорог с использованием специализированной гидрометеорологической информации (для опытного применения).
4. ГОСТ 33078-2014. Дороги автомобильные общего пользования. Методы измерения сцепления колеса автомобиля с покрытием.

УДК 517.95:556.53

В. А. Наумов

Калининградский государственный технический университет
Россия, г. Калининград, e-mail: van-old@mail.ru

УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ МАКСИМАЛЬНЫХ ГОДОВЫХ УРОВНЕЙ И РАСХОДОВ РЕКИ

Проведен анализ стохастической связи между максимальными годовыми уровнями и расходами воды реки Преголи в створе города Гвардейска. Показано, что в общем случае необходимо учитывать случайный характер обеих величин. В рассмотренном случае близкий к единице коэффициент корреляции позволяет пользоваться стандартной процедурой расчета параметров регрессионной зависимости без учета стохастического характера аргумента.

Ключевые слова: уровень реки, расход воды, максимальное значение, уравнение регрессии, погрешности расчета.

V. A. Naumov

Kaliningrad State Technical University
Russia, Kaliningrad, e-mail: van-old@mail.ru

MAXIMUM ANNUAL LEVELS AND STREAMFLOWS REGRESSION EQUATION

An analysis of the stochastic relationship between the maximum annual levels and water consumption of the Pregel River in the city of Gvardeysk was performed. It is shown that in General it is necessary to take into account the random nature of both values. In the considered case the correlation coefficient close to one allows to use the standard calculation procedure of regression dependence parameters without taking into account stochastic character of argument.

Keywords: river level, water consumption, maximum value, regression equation, calculation errors.

Введение. Эмпирические функции, связывающие измеренные расходы Q и уровни воды H в определенном створе реки, широко используются в инженерной гидрологии. Они позволяют по ежедневным уровням в данном створе реки рассчитать среднесуточные значения расхода воды. В.Г. Глушков предложил формулу, выражающую однозначную связь между Q и H (уравнение кривой расходов воды) в виде [1]:

$$Q = a (H + H_0)^m, \quad (1)$$

где H_0 , a , m – эмпирические константы.

Эмпирические коэффициенты (1) могут отличаться в разные годы, к тому же они зависят от ледовых явлений в холодное и от растительности в

теплое время [2], от динамики русловых процессов [3], от неустановившегося режима течения [4]. В результате однозначная связь $Q = f(H)$, применяемой которой приведены в [1], на практике встречается довольно редко. Чаще проявляется случайный характер указанной функции, причем даже в одном году вид ее реализации может быть довольно причудливым (рис. 1).

Чтобы найти плотность вероятности среднегодового уровня воды в реке при заданном законе распределения расхода, необходимо знать однозначную зависимость $Q = f(H)$. В [6] для этой цели было использовано осреднение большого числа реализаций случайной функции за разные годы. При определении теоретической кривой обеспеченности максимальных годовых уровней реки такой подход неприемлем, так как не учитывает особенности режима течения на пике половодья. Кроме того, ранее не принималось во внимание, что в формулах, подобных (1), не только функция, но и аргумент является случайным.

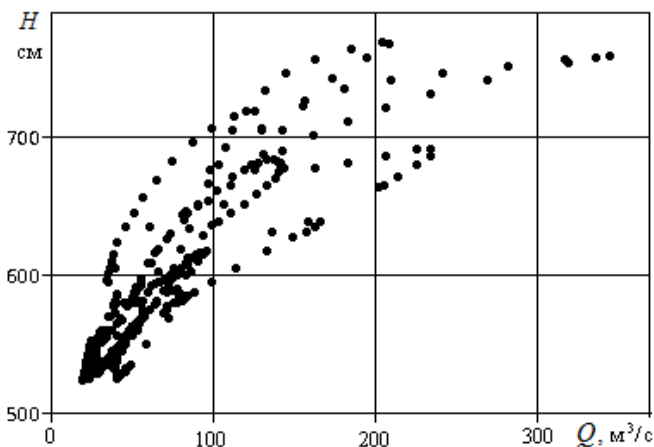


Рис. 1. Связь между уровнями и расходами воды реки Преголи в створе города Гвардейска (2013 г., по данным [5])

Цель данной статьи проанализировать связь между максимальными годовыми уровнями и расходами воды на примере реки Преголи, учитывая случайный характер как Q , так и H .

Исходные данные. Максимальные годовые расходы и уровни реки Преголи в створе города Гвардейска за 1955-1985 годы взяты из гидрологических ежегодников ([7-9] и т.д.), за 2008-2015 – данные Автоматизированной информационной системы государственного мониторинга водных объектов [10]. Остальные – из архива [5] после корректировки [11]. Дело в том, что данные [5] наименее надежные, встречаются явные промахи измерений [12]. Имеется предупреждение: «Используются оперативные дан-

ные Росгидромета, не прошедшие контрольную обработку. Могут содержать ошибки» [5]. Часть исходных данных представлена в табл. 1. Общий объем выборки $n = 61$.

Таблица 1. Максимальные годовые расходы и уровни реки Преголи в створе города Гвардейска

№ пп	Год	Дата	H , см	Q , м ³ /с
1	1955	31.03	771	404
2	1956	02.04	756	349
3	1957	21.08	828	734
4	1958	20.02	836	606
5	1959	26-27.01	736	266
6	1960	25.03	796	629
7	1961	04.03	665	207
8	1962	07.04	821	742
9	1963	26.11	764	462
10	1964	9-10.04	740	350
...				
54	2008	02.02	763	344
55	2009	21.03	739	326
56	2010	27-28.03	753	362
57	2011	11.02	885	795
58	2012	03.03	762	217
59	2013	11.02	780	433
60	2014	21.01	743	202
61	2015	14.01	655	104

Уравнение регрессии. Статистическая связь максимального годового расхода и максимального годового уровня в табл. 1 формируется за счет присутствия случайной составляющей в структуре обеих сравниваемых величин. В [13] предложено при линейной регрессии за ее оценку нужно принимать линию, соответствующую центральной оси эллипса рассеяния переменных. В общем случае связь $Q-H$ нелинейная, но выполнить оценки можно, перейдя к логарифмическим координатам:

$$q = \ln Q, \quad h = \ln H. \quad (2)$$

Регрессия q по h описывается уравнением [14]

$$q = \bar{q} + r \cdot (h - \bar{h}) \cdot \sigma_q / \sigma_h, \quad (3)$$

а регрессия h по q – уравнением [14]

$$h = \bar{h} + r \cdot (q - \bar{q}) \cdot \sigma_h / \sigma_q. \quad (4)$$

Точечные оценки коэффициента корреляции (между q и h) $r = 0,95$; средних квадратичных отклонений $\sigma_h = 0,248$; $\sigma_q = 0,511$.

Центральная ось эллипса рассеяния переменных занимает среднее положение между линиями регрессии q по h (3) и h по q (4), описывается уравнением

$$q = \bar{q} + (h - \bar{h}) \cdot \sigma_q / \sigma_h. \quad (5)$$

Оно получается, если в (3) положить $r = 1$.

Особенность приведенного уравнения (5) заключается в том, что в указанных условиях оно характеризует связь не исходных величин, а их детерминированных составляющих [13] (рис. 2).

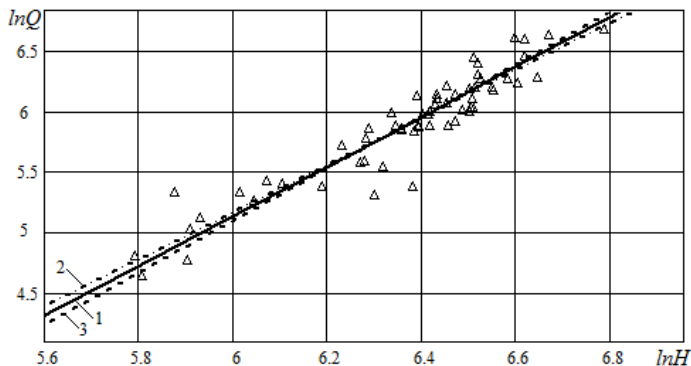


Рис. 2. Линии регрессии в логарифмических координатах.

Точки – данные наблюдений; 1 – по формуле (5), 2 – по (3), 3 – по (4)

Прямые на рис. 2 отличаются незначительно из-за того, что значение коэффициента корреляции близко к единице. Это позволяет в качестве уравнения регрессии использовать любое из соотношений (3) - (5). Применение (3) соответствует стандартному методу наименьших квадратов для исходных величин. В общем случае, когда коэффициент корреляции заметно меньше единицы, следует пользоваться (5).

В рассматриваемом створе получаем показатель степени $m = \sigma_q / \sigma_h = 2,06$, что близко к значению, полученному в [6]. Зависимость (1) для максимальных годовых расходов и уровней реки Преголи в створе города Гвардейска принимает вид:

$$Q = f_1(H) = 0,00451 \cdot (H - 516,9)^{2,06}. \quad (6)$$

На рис. 3 по [14] найден 95%-ный доверительный интервал для уравнения (6). Абсолютная полуширина доверительного интервала ΔH растет с увеличением H . На рис. 4 показана относительная полуширина

$$\varepsilon_1 = 100 \cdot \Delta H / f_1(H). \quad (7)$$

Значение ε_1 имеет минимум вблизи среднего значения H , а на краях интервала остается в пределах 15 %.

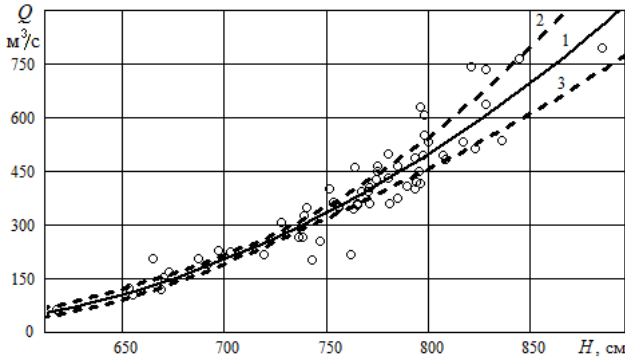


Рис. 3. Зависимость максимальных расходов от максимальных уровней реки Преголи в створе города Гвардейска (1955-2015 годы).

Точки – данные наблюдений, 1 – расчет по формуле (6),
2, 3 – границы доверительного интервала (6)

Линия 2 на рис. 4 показывает относительное отклонение уравнения регрессии (3) от (5) для исходных величин. Видно, что это отклонение значимо только на сравнительно небольших уровнях воды, тогда как в инженерной гидрологии для определения проектных отметок гидротехнических сооружений важны уровни малой обеспеченности.

Стандартная процедура в среде Mathcad по данным табл. 1 дает наилучшее приближение полиномом второго порядка:

$$Q = f_2(H) = 62,27 - 0,598 \cdot H + 0,00758 \cdot H^2. \quad (8)$$

Найдем относительное отклонение (8) от (6):

$$\varepsilon_3 = 100 \cdot (f_2(H) / f_1(H) - 1). \quad (7)$$

По рис. 4 указанное отклонение находится в пределах 6 %.

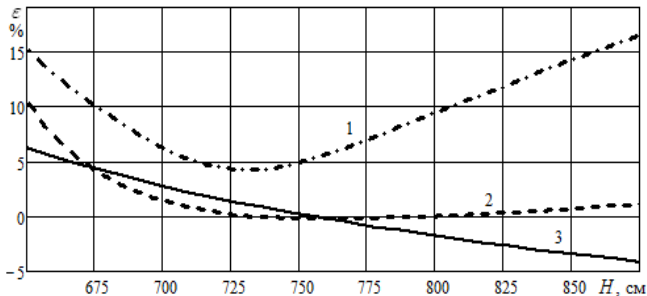


Рис. 4. Относительные отклонения и погрешности расчета расхода:

1 – полуширины доверительного интервала (7);
2 – по уравнению центральной оси эллипса рассеивания (5);
3 – по полиному второго порядка (8)

Заключение. В общем случае анализа стохастической связи между максимальными годовыми уровнями и расходами воды необходимо учитывать случайный характер как Q , так и H . Регрессионную зависимость следует находить по уравнению центральной оси эллипса рассеивания указанных величин.

Близкий к единице коэффициент корреляции между расходами и уровнями воды реки Преголи в створе города Гвардейска позволяет пользоваться стандартной процедурой расчета параметров регрессионной зависимости без учета стохастического характера аргумента. Результаты расчета по степенной зависимости и по полиному второго порядка различаются незначительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Практикум по гидрологии, гидрометрии и регулированию стока / Е.Е. Овчаров, Н.Н. Захаровская, И.В. Прошляков [и др.]; под ред. Е.Е. Овчарова. М.: Агропром, 1988. 224 с.
2. Маркова Л.В. Зависимость расхода от уровня воды в реке Преголя // Состояние и перспективы развития водохозяйственного комплекса региона: сб. науч. тр. Калининград, 2012. С. 68-74.
3. Двинских С.А. Динамика кривых расходов воды как индикатор русловых процессов / С.А. Двинских, Т.П. Девяткова, А.Б. Китаев, Т.А. Тереханова // Географический вестник. 2012. № 4. С. 30-40.
4. Винников С.Д. Исследование кинематики неустановившегося речного потока: монография. СПб: Изд-во РГГМУ, 2013. 104 с.
5. ГИС-портал Центра регистра и кадастра [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://gis.waterinfo.ru/> (дата обращения: 19.12.2017).
6. Ахмедов И.М. Плотность вероятности уровня воды в реке при известном законе распределения расхода / И.М. Ахмедов, В.А. Наумов // V Междунар. Балтийский морской форум (21-27 мая 2017 г.): материалы форума. Калининград: Изд-во БГАРФ, 2017. С. 676-680.
7. Гидрологический ежегодник 1955 г. Т. 1. Бассейн Балтийского моря / под ред. Л.И. Глазачевой. Вып. 4-6. Л.: Гидрометеиздат, 1959. 633 с.
8. Гидрологический ежегодник 1956 г. Т. 1. Бассейн Балтийского моря / под ред. Л.И. Глазачевой. Вып. 4-6. Л.: Гидрометеиздат, 1960. 401 с.
9. Гидрологический ежегодник 1957 г. Т. 1. Бассейн Балтийского моря / под ред. Л.И. Глазачевой. Вып. 4-6. Л.: Гидрометеиздат, 1961. 388 с.
10. Автоматизированная информационная система государственного мониторинга водных объектов [Электронный ресурс]. Режим доступа – по паролю. URL: <https://gmvo.skniivh.ru/> (дата обращения: 08.03.2018).
11. Наумов В.А. Материалы инженерно-гидрометеорологических изысканий в бассейне реки Преголи. Максимальные расчетные уровни воды // Вестник науки и образования Северо-Запада России: электрон. журн. 2015. Т. 1, № 3. С. 42-48. Режим: <http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2015/11/2015-№3-Наумов.pdf>.
12. Наумов В.А. Анализ изменений уровней и расходов реки Преголя в 2011 году / В.А. Наумов, Л.В. Маркова // Состояние и перспективы развития водохозяйственного комплекса региона: сб. науч. тр. Калининград, 2012. С. 75-81.
13. Иванов Е.Г. Об особенностях формирования и способах описания статистических зависимостей в гидрологии // Водное хозяйство России. 2007. № 2. С. 22-26.
14. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. М.: Физматлит, 2006. 816 с.

УДК 681.3.06

Е. Н. Трофимец

Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России
Россия, г. Санкт-Петербург, e-mail: ezemifort@inbox.ru

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СЛОЯ ДОЖДЕВОГО ПАВОДКА НА ТЕРРИТОРИИ ЛЕНИНГРАДСКОЙ ОБЛАСТИ

В статье проанализированы статистические данные ежедневных уровней воды дождевых паводков реки Ижора (левого притока Невы), предложена двух-факторная регрессионная модель прогноза слоя дождевого паводка.

Ключевые слова: чрезвычайная ситуация, математическая модель, прогнозирование, регрессия, дождевой паводок, гидрологический прогноз.

E. N. Trophimets

Saint-Petersburg University of State Fire Service EMERCOM of Russia
Russia, Saint-Petersburg, e-mail: ezemifort@inbox.ru

DEVELOPMENT OF THE FORECASTING MODEL LAYER OF RAINWAY FLOOD IN THE LENINGRAD REGION

The article analyzes the statistical data of daily water levels of rain floods in the Izhora river (the left tributary of the Neva river), presents a two-factor regression model of the forecast of the rainwater layer.

Keywords: emergency situation, mathematical model, prediction, regression, rainfall event, hydrological forecast.

Оперативная оценка обстановки и предупреждение чрезвычайных ситуаций, в условиях риска и неопределенности, требует от сотрудников МЧС России объективных и взвешенных решений. Прогнозирование и изучение опасных техногенных и природных событий требуют от специалиста МЧС России знаний инструментальных методов высшей математики. Они являются средствами предельно четкой формулировки понятий и проблем в области предупреждения и ликвидации последствий природных и техногенных катастроф на территории РФ с учетом поставленных целей и задач МЧС России.

В данной работе рассмотрен процесс построения математической модели прогноза максимальных уровней осеннего половодья реки Ижора – левого притока Невы.

В период осеннего половодья для Санкт-Петербурга и Ленинградской области характерны подъемы воды в дельте Невы и ее притоках, вызывающие затопление населенных пунктов. Причиной этого являются циклоны в Балтийском море с преобладанием западных ветров.

Сегодня наука достаточно далеко продвинулась в разработке методов прогнозирования. Для исследования наводнений методами математической статистики был использован метод регрессионного анализа.

Исследование проводилось в пять этапов: сбор эмпирических данных по максимальному уровню воды дождевых паводков реки Ижора с 2009–2015 гг. и данным Гидрометцентра России; построение двухфакторной линейной регрессии; проверка качества регрессионной модели; сравнительный анализ полученной теоретической прогнозной модели с фактическими данными за 2016–2017 гг.; определение ошибки прогноза.

Обработка эмпирических данных и построение регрессионной модели проводилась в MS Excel при помощи статистических функций и программной надстройки «Пакет анализа» [1].

На рис. 1 представлен фрагмент статистических данных за 2009–2015 гг. по исходному уровню воды реки Ижора в начале дня (x_1), объему выпавших за день осадков (x_2) и уровню воды в конце дня (y).

	A	B	C	D	E
1		Дата начала			
2	Год	выпадения паводко-	x_1 , см	x_2 , мм	$y_{\text{факт}}$
3		образующих осадков			
4	2009	06 сентября	198	13,8	232
5	2009	07 сентября	232	1,70	254
6	2009	08 сентября	254	0	271
7	2009	09 сентября	271	0	285
8	2009	10 сентября	285	0	291
9	2009	29 сентября	168	5,9	196
10	2009	02 октября	227	1,8	254
11	2009	03 октября	254	4,1	273
12	2009	05 октября	281	1,4	302
13	2009	15 октября	241	0,1	263
14	2009	17 октября	277	18	304
15	2009	23 октября	258	4,9	284
40	2013	28 октября	169	8	180
41	2013	29 октября	180	6	201
42	2013	30 октября	201	8	216
43	2013	05 ноября	214	16	282
44	2013	06 ноября	282	0,7	305
45	2014	08 октября	182	0,4	203
46	2015	11 ноября	160	4,7	174
47	2015	19 ноября	178	9	195
48	2015	20 ноября	195	3	213

Рис. 1. Статистические данные

На основе статистических данных была построена двухфакторная регрессионная модель:

$$y_{\text{теор}} = 0,995x_1 + 1,263x_2 + 16,835.$$

Множественный коэффициент детерминации $R^2 = 0,952$, что позволяет говорить о высоком качестве построенной модели (рис. 2).

ВЫВОД ИТОГОВ

<i>Регрессионная статистика</i>	
Множественный	0,97580769
R-квадрат	0,95220065
Нормированный	0,94992449
Стандартная ош	11,7074121
Наблюдения	45

Рис. 2. Регрессионная статистика

Проверка значимости множественного коэффициента детерминации и коэффициентов уравнения регрессии были проведена на уровне $\alpha = 0,05$. Проведенная проверка показала значимость всех коэффициентов регрессии (рис. 3).

Дисперсионный анализ					
	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Значимость F</i>
Регрессия	2	114677,3331	57338,66653	418,3365157	1,85294E-28
Остаток	42	5756,66695	137,0634988		
Итого	44	120434			

	<i>Коэффициент</i>	<i>стандартная ош</i>	<i>t-статистика</i>	<i>P-Значение</i>	<i>Нижние 95%</i>	<i>верхние 95%</i>
Y-пересечение	16,8345612	8,788652037	1,915488416	0,06225525	-0,901656489	34,57078
Переменная X 1	0,99698719	0,034617549	28,80005176	2,76169E-29	0,927126152	1,066848
Переменная X 2	1,26311757	0,274811745	4,596301261	3,9033E-05	0,708525023	1,81771

Рис. 3. Проверка качества уравнения регрессии

На основе построенной модели были рассчитаны теоретические значения уровня реки Ижоры ($y_{\text{теор}}$) по статистическим данным об исходном уровне воды (x_1) и объеме выпавших осадков (x_2) за ряд осенних дней 2016–2017 гг. Был проведен сравнительный анализ рассчитанных теоретических значений $y_{\text{теор}}$ с известными фактическими значениями уровня воды $y_{\text{факт}}$ в эти дни (рис. 4).

Проведенный анализ показал, что рассчитанные теоретические значения уровня воды хорошо согласуются с эмпирическими данными за 2016–2017 гг. Ошибка прогноза составила 6%, что позволяет судить о достаточно высокой надежности полученной прогнозной модели.

1	A	B	C	D	E	F	G	H
2	Год	Дата начала выпадения паводкообразующих осадков	x_1 , см	x_2 , мм	Уфакт	Утеор	Ошибка прогноза, см	Ошибка прогноза, %
3								
4	2016	28 октября	182	9	208	209,6543	1,654288	0,80%
5	2016	29 октября	208	6,8	219	232,7971	13,7971	6,30%
6	2016	30 октября	219	2	224	237,701	13,70099	6,12%
7	2016	31 октября	224	0,4	227	240,6649	13,66494	6,02%
8	2016	8 ноября	183	18	194	222,0193	28,01933	14,44%
9	2016	19 ноября	193	2,4	247	212,2846	34,71543	14,05%
10	2016	20 ноября	247	13	394	279,5109	114,4891	29,06%
11	2016	21 ноября	394	0	443	409,6475	33,35248	7,53%
12	2016	22 ноября	443	0	456	458,4999	2,499888	0,55%
13	2016	23 ноября	456	0,5	460	472,0923	12,09228	2,63%
14	2016	24 ноября	460	10,3	466	488,4588	22,45878	4,82%
15	2017	7 сентября	180	10	224	208,9234	15,07657	6,73%
16	2017	13 сентября	230	21	280	272,6671	7,332915	2,62%
17	2017	14 сентября	280	5	302	302,3066	0,306563	0,10%
18	2017	9 октября	184	20	235	225,5426	9,457444	4,02%
19	2017	10 октября	235	3	260	254,9159	5,084096	1,96%
20	2017	11 октября	260	12	282	291,2086	9,208642	3,27%
21	2017	25 ноября	315	6,3	340	338,8432	1,156832	0,34%
22	2017	26 ноября	340	6,9	355	364,5257	9,525718	2,68%
23	Срзнач		275,4211	7,715789	306,1053	301,1718	18,29439	6,00%

Рис. 4. Сравнительный анализ и вычисление ошибки прогноза

Предложенную модель можно использовать в будущем для прогноза слоя стока дождевого паводка реки Ижора в осенние месяцы. При этом следует отметить, что значения фактора x_2 – объем выпавших осадков – будут вводиться в модель на основе прогнозных данных Гидрометцентра. Так как эти данные являются достаточно правдоподобными в горизонте прогноза до 3–5 дней, то и предложенная модель обладает таким же горизонтом. Тем не менее, несмотря на краткосрочность прогноза, сотрудники МЧС России успеют в отведенное время предупредить население о возможном подтоплении и принять соответствующие меры для предотвращения чрезвычайных ситуаций природного характера.

На базе полученной прогнозной модели сделана географическая карта подтопления зданий в территориальных зонах реки Ижора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трофимец Е.Н. Прикладная математическая статистика в Excel. Часть 2. Дисперсионный анализ: учебное пособие. Ярославль, 2013. 128 с.

УДК 338.88

Н. А. Шишкина

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: shishkinana@ystu.ru

РАСЧЕТ МАРЖИНАЛЬНОЙ ДОХОДНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ

В условиях законодательных установленной нижней границы стоимости образовательных услуг предлагается расчёт рентабельности образовательных программ, определение порога рентабельности образовательного учреждения, возможность предоставления экономически обоснованных скидок.

Ключевые слова: маржинальная доходность, образовательная программа, конъюнктура рынка.

N. A. Shishkina

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: shishkinana@ystu.ru

CALCULATE MARGIN OF PROFITABILITY OF EDUCATIONAL PROGRAMS

In terms of the established legal lower limit of the cost of educational services, the calculation of the profitability of educational programs, the determination of the threshold of profitability of educational institutions, the possibility of providing economically reasonable discounts.

Keywords: marginal profitability, educational program, market conditions.

Одной из важнейших задач управления финансами является эффективное использование ресурсов, имеющихся в распоряжении организации. В настоящее время финансовое обеспечение государственного задания на выполнение услуг в части реализации образовательных программ высшего образования осуществляется в рамках нормативно-подушевого финансирования. Значения нормативных затрат на оказание государственных услуг по реализации образовательных программ высшего образования определяет учреждение.

Размер платы в расчете на единицу оказания платных образовательных услуг не может быть ниже величины нормативных затрат на оказание аналогичной государственной услуги в отношении контингента, принимаемого на обучение на соответствующий учебный год [1].

Исходя из условий законодательно определенной нижней границы стоимости реализации образовательной программы, требований к качеству оказания услуг, а также с учетом конъюнктуры рынка, возникла потребность расчета экономически обоснованных затрат, необходимых для оказания соответствующих платных услуг и обеспечивающих рентабельность образовательной программы.

Так как существующая на сегодняшний день в вузах учетная политика не дает информации о размере затрат, приходящихся на одного студента, предлагается рассчитать рентабельность образовательной программы в рамках анализа «direct-costing» (учет прямых затрат), предполагающего формирование ограниченной себестоимости с включением в нее переменных затрат.

Аналитическое выражение выручки от продаж (услуг) в анализе «direct-costing» представлено следующим выражением [2]:

$$Q \cdot p = (Q \cdot v) + FC + PS, \quad (1)$$

где Q – объем реализации в натуральном выражении; p – цена единицы продукции; v – переменные расходы на единицу; FC – условно-постоянные расходы; PS – прибыль.

Поскольку речь идет об образовательной программе, создание стоимости может происходить в учебном процессе. Прямые затраты, непосредственно связанные с учебным процессом, – это в основном объем часов образовательной программы, выраженный в форме заработной платы профессорско-преподавательского состава. Исходя из характеристики переменных затрат, заработная плата с начислением страховых взносов профессорско-преподавательского состава в предлагаемом расчете отнесена к переменным затратам.

Эмпирические исследования показали, что другие учебные затраты, зависящие прямо пропорционально от объема услуг, ничтожно малы, поэтому все остальные затраты, связанные с образовательным процессом и содержанием университетского имущества, отнесены к условно-постоянным и постоянным расходам соответственно.

С учетом принятых выше условий, и используя приведенную формулу (1), можно рассчитать удельную маржинальную доходность образовательных программ по формам обучения, а также определить, какая образовательная программа дает учреждению большую маржинальную прибыль. Если ввести в условие анализа количество обучающихся в группах, то можно прогнозировать динамику дохода в случаях невыполнения плана приема обучающихся в условиях неблагоприятной конъюнктуры рынка.

В таблицах 1-3 приведен расчет маржинальной доходности образовательных программ.

Таблица 1. Доходность образовательных программ при условии нормативно-го соотношения преподаватель/студент в соответствии с «дорожной картой»

Образовательные программы по формам обучения	План приема, человек (Q)	Цена, т.р.	удельные переменные затраты, т.р. (v)	маржинальная прибыль, т.р. (FC+PS)	удельный маржинальный доход т.р.	маржинальная доходность	Доля марж.прибыли
	1	2	3	4	5	6	7
Группа 1. Бакалавры (дневное)	51	109,3	74,8	1759,5	34,5	32%	0,25
Группа 2. Бакалавры (дневное)	55	122,6	74,8	2629,0	47,8	39%	0,37
Группа 1. Магистры (дневное)	5	117,9	74,8	215,5	43,1	37%	0,03
Группа 2. Магистры (дневное)	7	131,3	74,8	395,5	56,5	43%	0,06
Группа 1. Бакалавры (заочное)	61	43,7	30,0	835,7	13,7	31%	0,11
Группа 1. Магистры (заочное)	19	66,2	30,0	687,8	36,2	55%	0,10
Группа 2. Магистры (заочное)	9	74,3	30,0	398,7	44,3	60%	0,06
Бакалавры (ускоренное обучение)	120	61,5	60,1	168,0	1,4	2%	0,02
Итого	327			7089,5			

В табл. 1 удельные переменные затраты рассчитаны исходя из соотношения, принятого в «дорожной карте»: один работник ППС – 12 студентов [3].

Таблица 2. Доходность образовательных программ при условии обучения в группе 15 обучающихся

Образовательные программы по формам обучения	План приема, человек (Q)	Цена, т.р. (p)	удельные переменные затраты, т.р. (v)	маржинальная прибыль, т.р. (FC+PS)	удельный маржинальный доход т.р.	маржинальная доходность	Доля марж.прибыли
	1	2	3	4	5	6	7
Группа 1. Бакалавры (дневное)	51	109,3	63,1	2356,2	46,2	42%	0,18
Группа 2. Бакалавры (дневное)	55	122,6	63,1	3272,5	59,5	49%	0,25
Группа 1. Магистры (дневное)	5	117,9	69,6	241,5	48,3	41%	0,02
Группа 2. Магистры (дневное)	7	131,3	69,6	431,9	61,7	47%	0,03
Группа 1. Бакалавры (заочное)	61	43,7	16,1	1683,7	27,6	63%	0,13
Группа 1. Магистры (заочное)	19	66,2	20,2	874,0	46,0	69%	0,07
Группа 2. Магистры (заочное)	9	74,3	20,2	486,9	54,1	73%	0,04
Бакалавры (ускоренное обучение)	120	61,5	32,2	3516,0	29,3	48%	0,28
Итого	327			12863			1

Зная приемлемый уровень маржинальной доходности организации, по расчету маржинальной доходности можно выделить прибыльные и условно убыточные образовательные программы. Сравнение полученных в графе 3 таблиц 1-3 показателей маржинальной доходности отражает зави-

симость (при прочих неизменных составляющих) рентабельности образовательной программы от количества обучающихся в группе.

Таблица 3. Доходность образовательных программ при условии обучения в группе 5 обучающихся

Образовательные программы по формам обучения	План приема, человек (Q)	Цена, т.р. (р)	Удельные переменные затраты, т.р. (v)	Маржинальная прибыль, т.р. (FC+FS)	Удельный маржинальный доход т.р.	Маржинальная доходность
	1	2	3	4	5	6
Группа 1. Бакалавры (дневное)	51	109,3	121,6	-627,3	-12,3	-11%
Группа 2. Бакалавры (дневное)	55	122,6	121,6	55,0	1,0	1%
Группа 1. Магистры (дневное)	5	117,9	121,6	-18,5	-3,7	-3%
Группа 2. Магистры (дневное)	7	131,3	121,6	67,9	9,7	7%
Группа 1. Бакалавры (заочное)	61	43,7	35,1	524,6	8,6	20%
Группа 1. Магистры (заочное)	19	66,2	35,2	589,0	31,0	47%
Группа 2. Магистры (заочное)	9	74,3	35,2	351,9	39,1	53%
Бакалавры (ускоренное обучение)	120	61,5	70,3	-1056	-8,8	-14%
Итого	327			-113,4		

Используя данные таблиц 1-3, можно определить порог рентабельности образовательных программ, то есть минимальное количество обучающихся, при котором образовательное учреждение не будет убыточно:

$$Q_P = \frac{FC}{p-v}, \quad (2)$$

где Q_P – пороговое количество продукции

В целях повышения конкурентоспособности образовательные организации часто используют систему скидок. Снижение цены уменьшит удельный маржинальный доход образовательной программы. Данные приведенного анализа позволяют рассчитать, на сколько следует увеличить количество обучающихся, чтобы сохранить маржинальную прибыль на уровне, рассчитанном до предоставления скидки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ от 20 декабря 2010 г. N 1898 «Об утверждении порядка определения платы для физических и юридических лиц за услуги (работы), относящиеся к основным видам деятельности федеральных бюджетных учреждений, находящихся в ведении министерства образования и науки российской федерации, оказываемые ими сверх установленного государственного задания, а также в случаях, определенных федеральными законами, в пределах установленного государственного задания.
2. Ковалев В.В. Финансовый менеджмент: теория и практика. 2-е изд. перераб. и доп. М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2007. 1024 с.
3. Распоряжение Правительства РФ от 30.04.2014 N 722-р «Об утверждении плана мероприятий ("дорожной карты") "Изменения в отраслях социальной сферы, направленные на повышение эффективности образования и науки"»

УДК 66.022.51

В. А. Язев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: yazev_v_a@rambler.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СМЕШЕНИЯ КРОШКООБРАЗНОГО КАУЧУКА С НАПОЛНИТЕЛЕМ

Рассматривается математическое моделирование второй стадии процесса приготовления порошкообразной резиновой смеси в плужном смесителе с фрезой. Модель позволяет определять степени наполнения частиц смеси в зависимости от времени.

Ключевые слова: моделирование, приготовление порошкообразной резиновой смеси, плужный смеситель с фрезой.

V. A. Yazev

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: yazev_v_a@rambler.ru

MODELING OF THE POWDERED RUBBER AND FILLER MIXING PROCESS

The mathematical modeling of the second stage of the powdered rubber mixture preparation process in a plow mixer with a milling cutter is considered. The model allows determining the degree of filling of the mixture particles as a function of time.

Keywords: modeling, preparation of powdered rubber mixture, plow mixer with cutter.

В смесителе порошкообразных материалов плужного типа, оснащённом фрезерным измельчающим и диспергирующим устройством, производится измельчение крошкообразного каучука и введение наполнителей и ингредиентов в эластомер. Представляет интерес смоделировать кинетику процесса введения наполнителя в крошкообразный каучук.

Процесс состоит из двух стадий: на первой стадии в избытке наполнителя происходит измельчение каучука до некоторого предельного размера x_0 [1]. Кинетика процесса измельчения рассмотрена ранее [1] и описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -S(x)f(x, t) + \int_x^\infty S(y)B(x, y)f(y, t)dy, \quad (1)$$

где $f(x, t)$ – функция распределения измельчаемых частиц по размеру x в момент времени t ; $S(x)$ и $B(x, y)$ – соответственно селективная и распределительная функции.

После завершения первой стадии, если целью процесса является не просто измельчения каучука, но и приготовление порошкообразной резиновой смеси, наступает вторая стадия: введение наполнителя, при его избытке, в каучук. Это связано с нагреванием частиц каучука в зазорах активной части смесителя – фрезерного агрегата. В результате деформаций при прохождении зазора каучук переходит в вязкотекучее состояние, меняются параметры его реологии [2], и он становится способным сорбировать и поглощать наполнитель, преобразовываясь, таким образом, в резиновую смесь (РС).

Частицы многократно (k раз) проходят активную зону – фрезерное устройство, каждый раз поглощая наполнитель. В пассивной зоне смесителя, при перемешивании плугами, часть тепла отдаётся охлаждающей рубашке, другим частицам и свободному наполнителю.

Математическое моделирование на второй стадии сводится к задачам: а) определения степени нагревания и охлаждения частицы при k -том проходе; б) определения степени введения наполнителя при k -том проходе; в) нахождения распределения частиц по количеству проходов k за время t , то есть вероятности $P(k, t)$.

При моделировании процесса изменения размера частиц x на второй стадии применимо кинетическое уравнение Колмогорова - Фоккера – Планка [3, с. 279]:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(A(x)f(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(D(x)f(x, t)), \quad (2)$$

где $A(x)$, $D(x)$ – соответственно функции, характеризующие среднюю скорость изменения во времени и случайные изменения величины x [3, с. 280]. Таким образом, для использования при моделировании уравнения (2), надо определить сначала зависимости для системного и стохастического изменения x , то есть функции $A(x)$ и $D(x)$, поэтому в данной работе моделирование второй стадии ограничено некоторым средним размером x , изменяющимся в зависимости от k , без анализа всей функции $f(x, t)$.

При каждом прохождении частицы её вязкость изменяется от температуры T и скорости сдвига $\dot{\gamma}$ в соответствии с формулой [2]:

$$\mu(T, \dot{\gamma}) = \mu_0 \exp(b(T - T_0)) \dot{\gamma}^{1 - \frac{1}{n}}, \quad (3)$$

где n – индекс течения; μ_0 – коэффициент консистенции; b – температурный коэффициент.

Удельная степень введения наполнителя ξ зависит от вязкости и определяется формулой [4]

$$\xi = \xi_0 (\ln(\mu(T_0, \dot{\gamma})) / \ln(\mu(T, \dot{\gamma})))^{\alpha m}, \quad (4)$$

где ξ_0 и αm – коэффициенты.

За один проход через активную зону при избытке наполнителя в частицу введётся следующей его объём:

$$\Delta V_k = \frac{2y}{\delta \rho_n} \xi(\bar{T}_k), \quad (5)$$

где y – объём частицы; δ – зазор; ρ_n – плотность наполнителя;

$$\bar{T}_k = \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} T(t) dt \quad (6)$$

– средняя температура частицы при прохождении ею активной зоны за время t_k , причём

$$t_k = x_k k_\phi / \omega R_f, \quad (7)$$

где k – номер прохода частицей активной зоны; ω – угловая частота; R_f – радиус фрезы; k_ϕ – коэффициент формы, связанный с расплощиванием частицы в зазоре; x_k – размер частицы после k -го прохода.

Таким образом, объём частицы при k -том прохождении

$$y_k = y_{k-1} + \frac{2y_{k-1}}{\delta \rho_n} \xi(\bar{T}_k). \quad (8)$$

Изменение температуры при k -том прохождении, связанное с деформацией и трением частицы в зазоре, описывается уравнением

$$\frac{dT}{dt} = \mu(T, \dot{\gamma}) \frac{\omega^2 R_f^2}{\rho_k c \delta^2} + E_0 \frac{\ln(\mu(T, \dot{\gamma}))}{\ln(\mu(T_0, \dot{\gamma}))} (\varepsilon_{sg} \sqrt{x_k^2 \text{sch}(x_k)}) \frac{m_{tr} \omega R_f}{\rho_k c y_k}, \quad (9)$$

где ρ_k – плотность резиновой смеси после k -го прохождения; c – теплоёмкость; T_0 – температура приведения; ε_{sg} – степень сжатия, $\text{sch}(x_k) = x_k^2 / \delta$, $y_k = x_k^3$; m_{tr} – коэффициент трения; E_0 – начальный модуль [3].

После k -го прохода активной зоны частица (резиновой смеси) поступает в пассивную зону, где охлаждается и затем снова попадает в активную зону уже $(k+1)$ -тый раз. Её температура входа (относительная) оценивается по формуле [5]:

$$\bar{\theta} = \sum_{l=1}^{\infty} 6Bi^2 \exp(-\mu_l^2 Fo) / (\mu_l^2 (\mu_l^2 + Bi^2 - Bi)). \quad (10)$$

Здесь $\bar{\theta}$ – относительная средняя температура частицы после её охлаждения; μ_i – корни характеристического уравнения [5] при решении задачи нестационарной теплопроводности для шара; Bi – критерий Био, $Bi = \alpha R / \lambda$, где $R = x/2$, x – размер частицы, λ – коэффициент теплопроводности каучука или резиновой смеси, α – коэффициент теплоотдачи от частицы к среде охлаждения, Fo – критерий Фурье, $Fo = a\tau / R^2$, τ – время охлаждения, $a = \lambda / \rho c$ – коэффициент температуропроводности каучука или смеси, где ρ – плотность, c – удельная теплоёмкость каучука или смеси.

При моделировании принималась температура входа частицы в активную зону $(k + 1)$ -ый раз принималась равной

$$T_0^{<k+1>} = (T_n^{<k>} - T_0^{<k>})\varphi_T + T_0^{<k>} , \quad (11)$$

где φ_T – коэффициент остывания, $T_0^{<k>}$ и $T_n^{<k>}$ – соответственно входная и конечная температуры частицы при её k -том проходе через активную зону.

После k проходов через активную зону массовая доля введённого в эластомер наполнителя выразится формулой

$$\varphi_k = \frac{\sum_{l=0}^k 2y_l \xi_l / \delta}{\rho_e y_0} , \quad (12)$$

где: ρ_e – плотность эластомера, y_0 – объём частицы до введения наполнителя (объём каучука в частице РС), $\xi_l = \xi(\bar{T}_l)$.

Плотность РС частицы определится как

$$\rho_k = \frac{y_0 \rho_e (1 + \varphi_k)}{y_k} . \quad (13)$$

На второй стадии процесса приготовления порошкообразной резиновой смеси вероятности распределения числа k прохождения частицами активной зоны в зависимости от времени t было взято в Пуассоновском приближении:

$$P(t, k) = (\chi t)^k e^{-\chi t} / k! , \quad (14)$$

где

$$\chi = q / Gm , \quad (15)$$

q – эффективный расход по эластомерной фазе через активную зону; Gm – масса эластомерной фазы в смесителе.

Зависимости (3) – (15) позволяют осуществить математическое моделирование второй стадии процесса приготовления порошкообразных ре-

зиновых смесей и рассчитать степени наполнения каучука и их распределения по количеству проходов, а также определить интегральные характеристики поглощения наполнителя при переработке во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Язев В.А.* Моделирование процесса измельчения эластичных материалов // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Изд. дом ЯГТУ, 2015. С. 174 – 178
2. *Торнер Р.В.* Основные процессы переработки полимеров (теория и методы расчёта). М.: Химия, 1972. 456 с.
3. *Протодьяконов И.О.* Статистическая теория явлений переноса в процессах химической технологии / И.О. Протодьяконов, С.Р. Богданов. Л.: Химия, 1983. 400 с.
4. *Вострокнутов Е.Г.* Переработка каучуков и резиновых смесей (реологические основы, технология, оборудование) / Е.Г. Вострокнутов, М.И. Новиков, В.И. Новиков, Н.В. Прозоровская. М.: Химия, 1980. 280 с.
5. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент: справочник / под ред. В.А. Григорьева и В.М. Зорина. М.: Энергоиздат, 1982. 517 с.

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

УДК 658.711

А. С. Ангелов, А. С. Ермишин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ermishinas@ystu.ru

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ УПРАВЛЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ВНЕШНИМИ ПОСТАВЩИКАМИ ОРГАНИЗАЦИИ ОПТОВО-РОЗНИЧНОЙ ТОРГОВЛИ НА ОСНОВЕ SRM-СИСТЕМ

В статье рассматриваются работа организации оптово-розничной торговли с внешними поставщиками. При помощи процессного подхода разработана модель бизнес-процессов взаимодействия с поставщиками, выявлены основные проблемы и рекомендовано применение SRM-систем. Также дается описание основных модулей SRM-системы, их возможностей и преимуществ.

Ключевые слова: организация оптово-розничной торговли, процессный подход, моделирование бизнес-процессов в методологии IDEFO, SRM-системы.

A. S. Angelov, A. S. Ermishin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru

IMPROVING THE MANAGEMENT OF INTERACTION WITH EXTERNAL SUPPLIERS OF THE ORGANIZATION WHOLE SALE AND RETAIL TRADE ON THE BASIS OF SRM SYSTEMS

The article discusses the work of the organization of wholesale and retail trade with external suppliers. Using the process approach, a model of business processes of interaction with suppliers, and identified the main problems, and recommended the use of SRM systems. The description of the main modules of the SRM system, their capabilities and advantages is also given.

Keywords: the company of wholesale and retail trade, process approach, business process modeling in IDEFO methodology, SRM systems.

Важность выбора и построение взаимовыгодных отношений с поставщиками объясняется не только функционированием на современном рынке большого количества поставщиков одинаковых материальных ре-

сурсов, но и тем, что они должны быть, прежде всего, надежными партнерами товаропроизводителя в реализации его стратегии организации производства [1].

ООО «Линк» – юридическое название холдинга «Аксон», реализующего свою деятельность в направлениях розничной торговли (торговые центры DIY, мебели и бытовой техники «Аксон», базы, магазин офисной мебели «Заря»), сервисно-производственном («Аксон сервис», строительная компания «Кордис», цех по производству металлоизделий и кузница, предприятие по производству мебели «Такос», кадровое агентство «Профи-Консалт», охранное предприятие «Кобальт», транспортная компания «Спецтранс»), банковском (КБ «Аксонбанк») и производстве сельскохозяйственной продукции (ОАО «Колхоз Домославский»).

Приемка товара на предприятии производится следующим образом:

- контроль грузового транспорта на наличие пломб – свидетельство того, что к поставляемым товарам не было доступа в ходе перевозки;
- пересчет грузовых мест (паллет с товаром);
- производится проверка входных документов на их целостность (наличие печатей, подписей водителя и отправителя – поставщика);
- товар выгружается из транспортного средства в зону приемки на складе;
- с помощью терминалов сбора данных производится сканирование всех поставленных единиц продукции на предмет обнаружения недостатков или излишков;
- кладовщиком производится сплошной контроль продукции на предмет дефектов;
- в случае обнаружения дефектов в программе 1С: Торговля составляется акт о бракованном товаре от поставщика;
- в случае обнаружения излишков или недостатков в программе 1С: Торговля создаются акты излишков (недостач товара).

Для анализа процесса оборота товаров на складе была построена контекстная диаграмма с помощью методологии функционального моделирования IDEFO [2] в среде Business Studio, приведенная на рис. 1.

Регламентирующие документы по деятельности на складе – инструкции по охране труда (ИОТ), должностные инструкции, действующее законодательство.

Факты хозяйственной деятельности на складе регистрируются с помощью информационно-технической базы 1С: Торговля (ИТБ).

После контекстной диаграммы средствами Business Studio выполнена декомпозиция процесса оборота товаров на складе (рис. 2).

В результате дальнейшего разбиения подпроцесса «Хранение» получаем диаграмму декомпозиции (рис. 3).

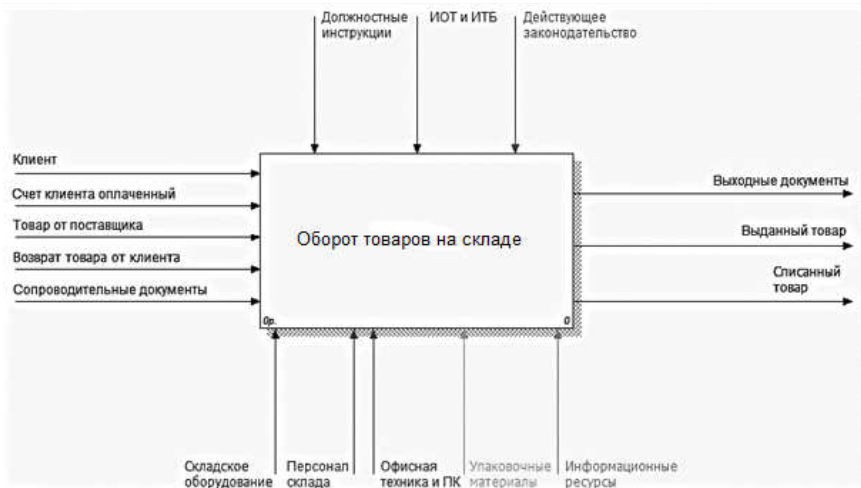


Рис. 1. Контекстная диаграмма процесса оборота товаров на складе

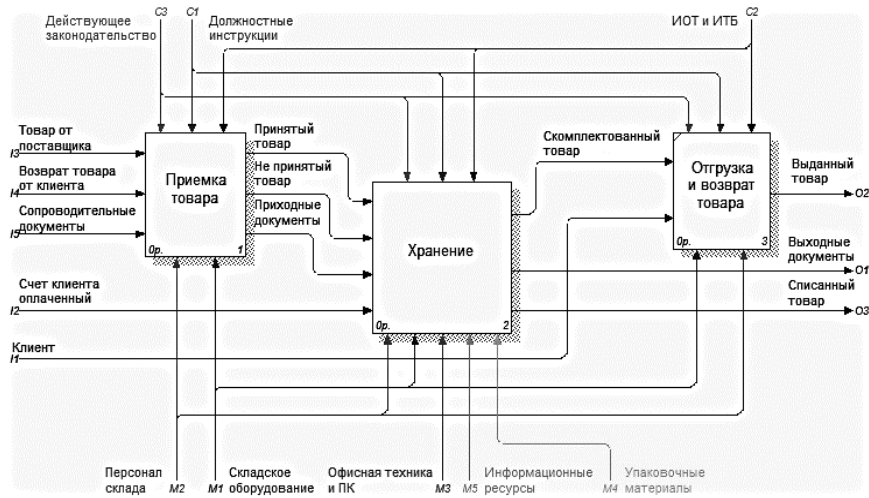


Рис. 2. Диаграмма декомпозиции IDEF0 процесса оборота товаров на складе

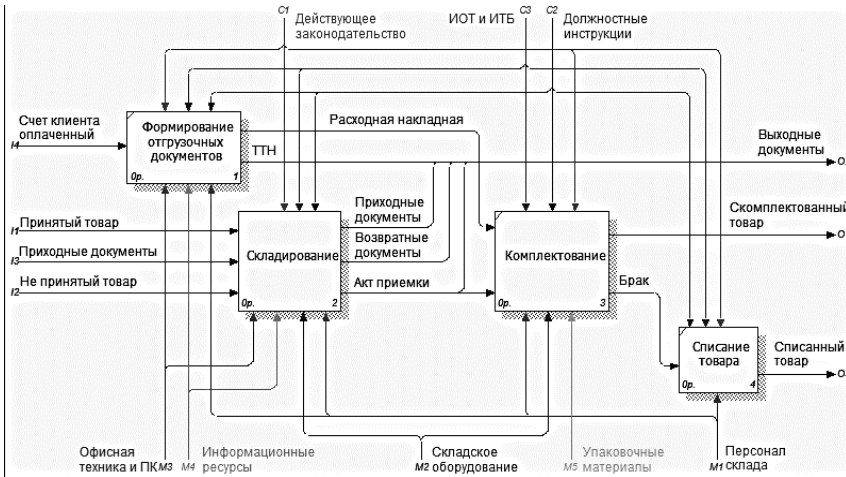


Рис. 3. Диаграмма декомпозиции IDEF0 подпроцесса «Хранение»

В результате дальнейшего разбиения (декомпозиции) подпроцесса «Складирование» получаем конечную диаграмму декомпозиции (рис. 4).

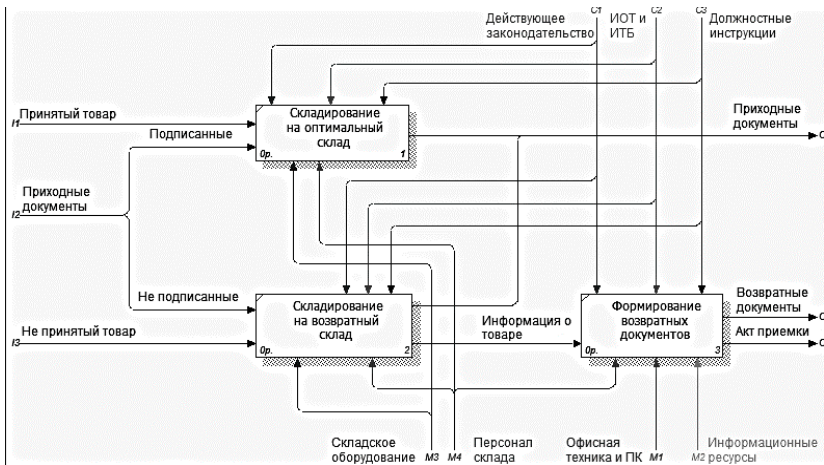


Рис. 4. Диаграмма декомпозиции IDEF0 подпроцесса «Складирование»

Выполненные процессные модели основных бизнес-процессов с поставщиками предприятия показали, что необходимо оптимизировать эту деятельность. Для оптимизации взаимоотношений с внешними поставщиками в компании ООО «Линк» рекомендуется применять информационную систему на основе SRM.

SRM (Supplier Relationship Management) или управление взаимоотношениями с поставщиками стремится сократить внутренние затраты на цепочку поставок не только за счет оптимизации процесса закупок, но также путем поиска более компетентных и надежных компаний-поставщиков, которые гарантируют соблюдение контрактных требований, то есть системой оценки эффективности поставщика (KPI) занимаются совместно потребитель и поставщик [3].

SRM-системы позволяют контролировать весь цикл поставок: от стратегического планирования до реализации. Они позволяют оптимизировать процесс выбора поставщиков и сократить продолжительность снабженческих циклов.

Решение SRM-системы позволяет автоматизировать все процессы, объединяющие в себе выбор источников поставок и собственно снабженческую деятельность, также позволяет увеличить прозрачность логистической сети и предоставить в распоряжение руководства обзор всех затрат, связанных со снабжением [1].

Модульный принцип SRM-систем позволяет быстро собрать индивидуальную функциональность и настроить ее под задачи организации. Основные модули системы представлены ниже.

Модуль SRM «Планирование закупок» отвечает за регистрацию, согласование, ревью, консолидирование заказов, анализ и прогнозирование потребностей, формирование плана-графика закупок, коммуникацию заказчика с поставщиком, позволяя в оперативном режиме получать важную информацию, например, об изменениях в условиях поставок, новинках производства и так далее.

Модуль «Управление качеством поставщиков». При оценке качества и производительности поставщика используются критерии, позволяющие в каждый момент времени иметь полную и актуальную информацию о текущем состоянии поставщика.

Для оценки качества поставщиков в системе применяются опросные листы, заполняемые как поставщиками, так и взаимодействующими с ними сотрудниками. Каждый опросный лист имеет вес, учитываемый при итоговой оценке поставщика. Для каждого опросного листа назначаются товарные группы, регионы поставки, график рассылки и адресат (группа сотрудников или поставщики по товарной группе).

Для минимизации рисков при заключении договоров с поставщиками эффективным инструментом является модуль «Рейтинг поставщиков».

Подобная система (рейтинг) – это единая база данных, которая содержит информацию о контрагентах предприятия и историю работы с ними при исполнении договоров. Индекс деловой репутаций вычисляется по определенной методике для каждого поставщика на основании фактов, которые можно документально подтвердить. При расчете дается оценка в баллах наиболее значимым негативным и позитивным фактам поведения

участника закупки при исполнении им обязательств по заключенным договорам. Используя специальную методику оценки влияния факта на репутацию контрагента, определяется интегральный числовой показатель (показатели), который и является рейтингом репутации контрагента.

Этот индекс в дальнейшем может учитываться в процессе проведения закупочных процедур, в частности, при определении победителя тендера.

Модуль «Электронная торговая площадка по закупкам» позволяет организовать собственную (корпоративную/монобрендовую) электронную торговую площадку (ЭТП), благодаря которой можно проводить в электронной форме любые торговые процедуры (аукционы, конкурсы и производные от этих процедур в закрытой или открытой форме участия и подачи предложений) и запросы коммерческой информации. Здесь имеется возможность проводить закупочные процедуры по собственным правилам, настраивая порядок допуска поставщиков к торгам, этапы формирования лотов, время проведения торгов, формирование протокола по проведенным торгам, порядок предоставления обеспечения и так далее в точном соответствии со своим положением о закупках.

«Электронная торговая площадка» может рассылать уведомления о важных событиях всем участникам торгов, автоматически выбирать оптимального поставщика, работать с обеспечением и банковскими гарантиями, выгружать необходимую информацию на zakupki.gov.ru и другие ресурсы, и многое другое. Удобно также, что система автоматически собирает статистику экономии средств на ЭТП (снижение начальной цены). К слову, за счет конкурентной борьбы при проведении закупок для нужд компании посредством электронной торговой площадки ЭТП снижение цены происходит в диапазоне 5-35% от заявленной начальной цены приобретаемого лота.

В SRM-системе взаимопониманию заказчиков и поставщиков способствует модуль «Электронный каталог», который позволяет поставщикам оперативно анализировать потребности потенциальных заказчиков и сопоставить их со своими возможностями. Данное решение представляет единую базу закупаемых позиций, куда вносится накопленная в SRM-системе информация о спецификации той или иной закупаемой продукции или услуги (если деталь стандартизована и нормирована, то это производственные требования, износы, гарантии, допуски и т.п.).

Каталог можно интегрировать с модулем «планирование закупок» и с интернет-магазинами, благодаря чему сотрудники подразделений получают возможность самостоятельного оформления потребностей в материалах и услугах с помощью так называемой «закупочной корзины».

Помогает экономить значительные средства заказчика на закупке малоценных товаров (товары, стоимость которых существенно ниже, чем затраты на их приобретение) – модуль «Малые закупки».

Модуль «Управление договорами». Кураторы договоров в оперативном режиме уведомляются о приближении и наступлении предусмотренных договором событий. Действия и бездействие кураторов договоров учитываются системой и подвергаются последующему анализу.

В SRM может быть установлен модуль «Финансы», предназначенный для оптимизации работы заказчика и его поставщиков в рамках процессов, связанных с внесением-возвратом обеспечения участия в торгах и обеспечения исполнения контракта. Этот модуль построен на общих принципах бухгалтерских систем, позволяет вести как мультивалютный учет, так и учет в натуральном выражении, интегрироваться с другими учетными системами. Все данные в модуле хранятся в обезличенном виде, то есть без возможности их интерпретации нежелательными лицами.

Оценка эффективности взаимоотношений происходит с помощью модуля «Отчетность». Данный инструмент агрегирует аналитическую информацию из других модулей SRM-системы, охватывая все необходимые этапы закупочной деятельности и позволяя в считанные минуты получить актуальную информацию в отчетах, созданных по формам корпоративного стандарта и/или согласно утвержденным действующим законодательством.

В результате исследований были сформулированы следующие выводы:

1. В ООО «Линк» взаимоотношения с внешними поставщиками развиты очень слабо. Отсутствует обратная связь от поставщика по результатам проверки поставок на дефекты, поставщики редко проводят мероприятия по совершенствованию технологического процесса своего производства.

2. Условия внешней среды, размер компании и сфера деятельности определяют политику в сфере логистики. Сейчас конкуренция в сфере продаж строительных материалов как никогда высока, поэтому уменьшение стоимости товара за счет исключения издержек является одним из наиболее эффективных методов повышения конкурентоспособности.

3. С помощью использования идеологии SRM анализируемому предприятию можно достичь следующих преимуществ:

- повысить конкурентоспособность компании-потребителя, точность и прозрачность информации о закупаемой продукции в цепи поставок;
- обеспечить удобство форматов обмена данными, касающимися всех аспектов снабжения;
- установить, измерить и управлять стратегиями оптимального сорсинга, с помощью которых достигаются корпоративные цели, и уменьшаются снабженческие риски;
- получить точный и всеобъемлющий профиль базы поставщиков;
- расставить приоритеты и консолидировать поставщиков на основе факторов, наиболее важных для конкретного бизнеса;

– обеспечить соответствие условиям контракта и уменьшить нерациональные расходы и потери.

Тем самым, применение SRM-системы позволит выстраивать стабильные и эффективные отношения организации с поставщиками на долгосрочной основе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Котлер Ф.* Бренд-менеджмент в B2B-сфере: пер. с англ. / Ф. Котлер, В. Пферч. М.: Изд-во «Вершина», 2007. 432 с.
2. Р 50.1.028-2001. Информационные технологии поддержки жизненного цикла продукции. Методология функционального моделирования. Введ. 2002-07-01. М.: Госстандарт России, 2001. 50 с.
3. *Gattorna J.L.* Gower Hand book of Supply Chain Management / J.L. Gattorna. USA: Gower Publishing Company, 2003. 331 p.

УДК 331.1

К. А. Гапоник, А. С. Ермишин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ermishinas@ystu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ БИЗНЕС-ПРОЦЕССОВ АУТСОРСИНГОВОЙ КОМПАНИИ

В статье дана краткая характеристика ярославского филиала московской аутсорсинговой компании по сопровождению деятельности интернет-торговли посредством web-разработки, фулфилмента, call-центра и логистики. Проведен краткий анализ кадровой политики, рассматриваются основные проблемы управления персоналом в компании, разработаны и предложены мероприятия по совершенствованию системы управления персоналом. Описывается обоснование применения в работе организации корпоративного портала, что позволит экономить рабочее время, автоматизировать различные операции, упростить поиск нужной информации, наладить общение между сотрудниками, отделами и подразделениями, повысит прозрачность работы в компании.

Ключевые слова: аутсорсинговая компания, система управления персоналом, совершенствование, информационные технологии, корпоративный портал.

К. А. Gaponik, A. S. Ermishin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru

THE APPLICATION OF INFORMATION TECHNOLOGY TO IMPROVE BUSINESS PROCESSES OUTSOURCING COMPANY

The article gives a brief description of the Yaroslavl branch of the Moscow outsourcing company to support the business of Internet-trading for the solution of web development, fulfilment, call-center and logistics. The conducted brief analysis of the personnel policy, considers the main problems of personnel management in companies, financed and proposed measures to improve the personnel management system. The substantiation of application of the corporate portal in the work of the organization is described that will allow it to save time, automate a variety of operations, to simplify the search of necessary information, establish the communication between employees, departments and divisions, would enhance transparency in the company.

Keywords: *outsourcing company, personnel management system, improvement, information technologies, corporate portal.*

Повышение эффективности деятельности компании в современных условиях возможно только при увеличении отдачи от сотрудников, что требует от менеджеров по персоналу всё большего внимания. Немаловажную роль, в связи с этим, играет целостная система мотивации сотрудников организации. Менеджеры по персоналу нуждаются в конкретных инструментах при выполнении такого воздействия [1].

ООО «ТЭК» является ярославским филиалом московской аутсорсинговой компании. Компания предоставляет полный спектр услуг по сопровождению деятельности интернет-торговли посредством web-разработки, фулфилмента, call-центра и логистики.

На данный момент клиентами компании являются 92 интернет-магазина. Заключены контракты с лидирующими транспортными компаниями в стране, что позволяет быстро и оперативно доставлять груз по всей территории РФ и вести сотрудничество с другими компаниями, независимо от региона их нахождения.

Деятельность ООО «ТЭК» организована следующим образом. Компания торгует товарами из определенного спектра. Каждый из этих товаров характеризуется ценой, справочной информацией и признаком наличия или отсутствия доставки. В компанию обращаются заказчики. Для каждого из них запоминается в базе данных стандартные данные (наименование, адрес, телефон, контактное лицо) и составляется по каждой сделке документ, запоминая наряду с заказчиком количество купленного им товара и дату покупки.

Основной бизнес-процесс описан с использованием нотации ARISeEPC, смоделированный в среде ARIS Express. Схема процесса приведена на рис. 1.

Персонал, выполняющий бизнес-процессы, является ключевым активом компании и определяющим фактором достижения ее стратегических целей.

Огромная функциональная роль в управлении персоналом принадлежит директору по персоналу, являющимся ещё и руководителем отдела кадров.

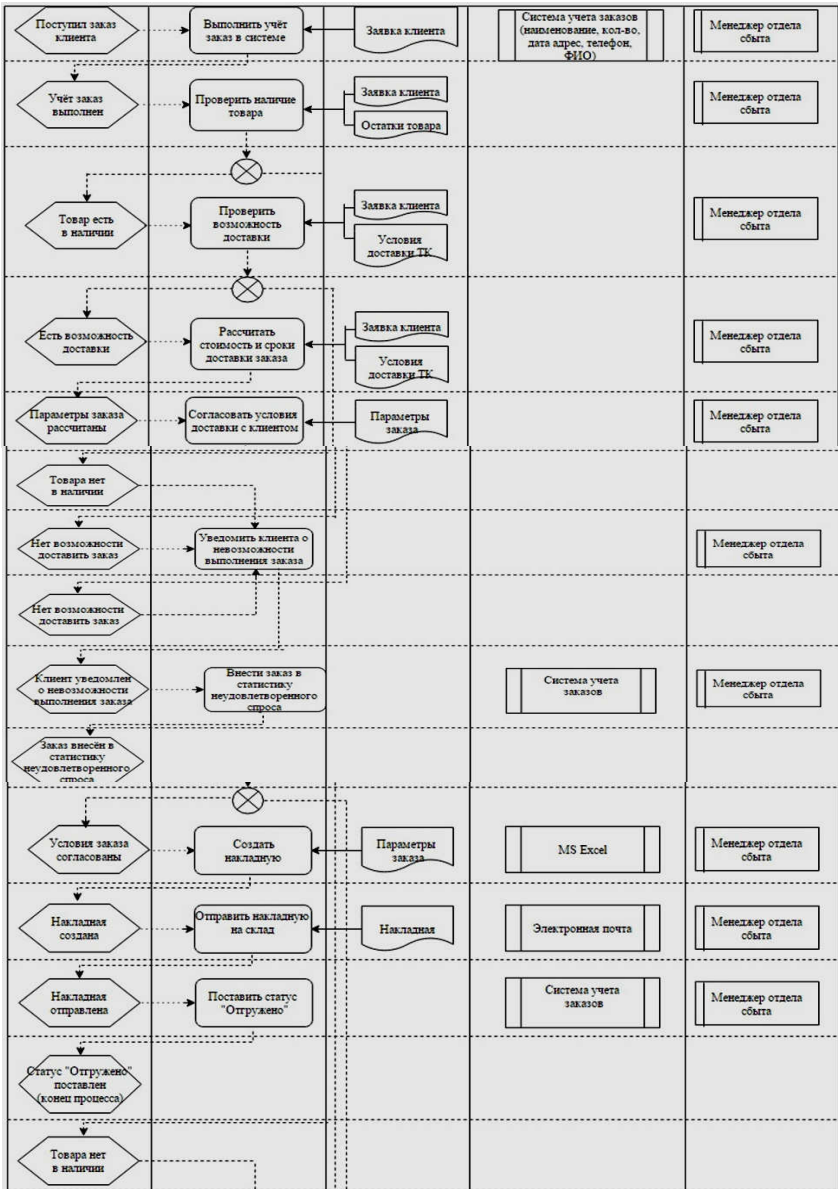


Рис. 1. Описание бизнес-процесса обработки заказов

Функции, вмененные директору по персоналу, требуют больших затрат времени и сил на их выполнение, что ни может не сказываться на деятельности компании.

В результате анализа системы управления персоналом в ООО «ТЭК» были выявлены следующие проблемы:

– снижение общей численности работников за анализируемый период, что свидетельствует о снижении опытного кадрового потенциала в компании;

– неполная укомплектованность кадрами;

– высокая текучесть кадров в компании, основными причинами которой являются неудовлетворенность условиями труда, характером работы, уровнем заработной платы, климатом внутри коллектива, перемена места жительства и прочие;

– недостаточная укомплектованность кадровым резервом.

Совершенствование качества управления персоналом должно основываться, как минимум, на 5 из 7 принципов менеджмента качества, согласно ГОСТ Р ИСО 9001-2015, применимых к управлению человеческими ресурсами, а именно:

– лидерство;

– взаимодействие людей;

– процессный подход;

– улучшение;

– принятие решений, основанных на свидетельствах [2].

Поэтому было предложено для совершенствования мониторинга персонала в компании внедрить оценку персонала с помощью процесса выявления талантов (TIP). TIP необходимо осуществлять как ежегодную процедуру. Цель оценки персонала по методике TIP заключается в оценке потенциала сотрудника для компании. Для этого должно быть сформировано «Портфолио сотрудников», которое будет содержать результаты оценки их деятельности и потенциала.

В случае если сотрудник имеет потенциал для принятия большей ответственности, то должно осуществляться управление его талантами.

При этом должны быть выделены категории сотрудников, которые имеют потенциал для принятия большей ответственности и высокий потенциал для принятия большей ответственности. Такие сотрудники должны быть зачислены в кадровый резерв компании.

Для самооценки сотрудников необходимо, чтобы с помощью специально разработанной программы, сотрудник заполнял последовательно предложенные формы и сформировал план своего личного развития [3].

При этом оценка результативности деятельности сотрудника может осуществляться руководителем с учетом критериев эффективности (KPI). KPI должно стать частью корпоративной культуры, они должны быть у всех сотрудников и постоянно измеряться.

Информационные технологии могут помочь эффективно управлять персоналом организации. Предлагается использовать для этих целей корпоративный портал, который позволит оптимизировать все бизнес-процессы компании. Это рабочий инструмент организации.

Корпоративный портал – это сайт компании, который содержит в себе всю необходимую информацию: файловые архивы, список сотрудников, контакты, внутренние бизнес-процессы, структуру организации и многое другое.

Типы корпоративных порталов:

– внутренний корпоративный портал – доступ к нему имеют только сотрудники и лица, имеющие к нему доступ, например, клиенты;

– внешний корпоративный портал – ресурс для взаимодействия с клиентами, содержит всю необходимую информацию о компании, предоставляемых услугах.

Функции корпоративного портала:

1. Информационная – внутренний ресурс портала хранит в себе все необходимые сотрудникам документы, информацию, контакты, данные сотрудников. В живой ленте моментально отображаются все изменения по задачам. Удобная навигация позволяет легко искать нужную информацию. Доступ к рабочим материалам можно осуществлять из любой точки, что крайне важно при работе из дома, командировках и отсутствии на рабочем месте.

2. Коммуникативная – корпоративный портал дает возможность сотрудникам в режиме реального времени обсуждать все рабочие вопросы, решать поставленные задачи. Внутренняя переписка в компании сохраняется и не находится на сторонних серверах.

3. Планирование – портал содержит возможность постановки задач. Их можно создавать, делегировать, следить за ходом исполнения, читать комментарии и прикреплять документы. Наличие корпоративного портала в разы увеличивает эффективность работы как каждого сотрудника, так и в целом всего коллектива, влияя на производительность всей компании в целом. Это надежный и универсальный инструмент для управления как малым, так и большим бизнесом со сложными задачами, структурой и бизнес-процессами.

Преимущества внедрения корпоративного портала:

– оперативно меняющаяся и доступная для клиентов информация;

– быстрое реагирование на изменяющиеся запросы клиентов;

– корпоративный портал может стать дополнительным каналом продаж компании;

– экономия времени. Автоматизация различных операций. Упрощенный поиск нужной информации;

– налаживание общения между сотрудниками, отделами и подразделениями;

– эффективная коммуникация между сотрудниками занятыми работой над одним проектом;

- наличие мгновенных сообщений и чатов;
- налаженный документооборот и отчетность;
- прозрачность работы в организации;
- информирование в живой ленте о всех событиях в компании;
- видеоконференции;
- работа через Экстранет;
- создание своей базы знаний внутри компании;
- быстрое согласование документов.

Корпоративный портал позволяет оптимизировать все бизнес-процессы как в крупных, так и в небольших компаниях. Это рабочий инструмент компании.

Возможности корпоративного портала:

1. Бизнес-коммуникации. Работа в корпоративном портале с удовольствием – как в социальной сети. Совместная работа над проектами и обсуждение в реальном времени. Использование привычных инструментов для коммуникации, управления задачами, документами, рабочим временем и другими сервисами. Все инструменты «под рукой» – в интерактивной «Живой ленте». Возможность пригласить коллег в групповой бизнес-чат, общение с ними голосом и с видео, возможность отправления сообщений, совместное редактирование документов. Связь с коллегами, которые офлайн, – звонки на мобильные номера прямо из портала. Возможность звонить клиентам на обычный телефон из CRM с помощью встроенной телефонии. Работа с партнерами совместно в Экстранете – на защищенной и нейтральной территории.

2. Управление задачами и проектами. Осуществляется с помощью удобных инструментов. Функционал задач включает интеграцию с календарями, механизм делегирования, чек-листы, готовые шаблоны задач, конструктор фильтров и задачи в Экстранете для работы с партнерами. Контроль за своевременным исполнением задач в подразделениях, помогая подчиненным не допускать нарушений. Учёт в рамках проекта затрат времени и других ресурсов на выполнение задач. Отслеживание хода задач по проекту с помощью диаграммы Ганта – сколько всего задач, сколько из них завершено и сколько находится в работе, какие задачи просрочены, а какие – вообще без срока. Проверка загруженности коллег с помощью специальной диаграммы, прежде чем поставить ему новую задачу. Оценка работы с задачами, получая отчеты по людям/отделам/проектам. Подведение итогов работы за месяц по отделу и по каждому сотруднику.

3. CRM: клиенты и продажи. Ведение в своей CRM базы контактов и компаний, с которыми организация сотрудничает. Управление лидами сделками с любого устройства, включая мобильные. Задействование E-mail-трекера, чтобы по новым письмам создавались лиды, а вся переписка сохранялась в их карточках. Фиксирование всех событий (звонки, письма, встречи), выставление счетов клиентам, построение отчетов и «Воронки продаж». Планирование дел, не выходя из CRM. Создание задач, ис-

пользование бизнес-процессов для обработки лидов и сделок, рассылка писем и звонки клиентам прямо из CRM на обычные телефоны. Включение IC-трекера, чтобы иметь всегда актуальный каталог товаров и «свежий» прайс-лист. Интегрирование CRM с интернет-магазином для того, чтобы менеджеры вели и «дожимали» сделки до успешного завершения из самой CRM. Создание профессиональной веб-формы осуществляется так же просто, как документ MS Word. Включение в форму поля из любых документов CRM (контакта, лида и т.д.). Связывание любой веб-формы на сайте с корпоративным порталом и автоматическое отправление данных с этой веб-формы в CRM.

4. Открытые линии. Объединение всех цифровых каналов коммуникации с клиентами в корпоративном портале (В контакте, Facebook, Телеграмм, Skype и др.). Общение с клиентами в режиме реального времени. Не важно, по какому каналу обращается клиент – соцсеть, мессенджер или чат на сайте – все сообщения перенаправляются в корпоративный портал. Свободный сотрудник отвечает на них в режиме реального времени, при необходимости перенаправляет вопрос коллеге или на верхний уровень поддержки. Клиент получает ответ в той же среде, где он оставил вопрос.

5. Совместная работа с документами. Управление своими рабочими файлами и с компьютера, и прямо из портала. Подключение к своему диску папки с файлами компании и диски групп, возможность открыть доступ своим коллегам и работать с файлами вместе. Возможность поделиться документами с коллегами, обсудить их в «Живой ленте», получить для них внешние ссылки для социальных сетей и партнеров. Работа с документами даже при отсутствии офисного программного обеспечения. Через внешние онлайн сервисы Google Docs и MS Office Online возможность открыть, просмотреть и отредактировать непосредственно на портале любые файлы популярных форматов. Редактирование любых документов на портале с помощью «родных» приложений, установленных на компьютере. Вся история изменений сохраняется, всегда можно восстановить предыдущую версию документа, а нужный документ легко отыскать внутренним поиском.

6. Планирование и учет рабочего времени. Включение учета рабочего времени, чтобы повысить дисциплину в компании. Сотрудники будут отмечать начало и конец рабочего дня, перерывы, отсутствия, планировать задачи на день. На основе этих данных для руководства сформируется отчет по рабочему времени. В этих отчетах будут также учтены затраты времени на выполнение задач. Планирование мероприятий в календаре. Возможность загрузки его в мобильный телефон или планшет, чтобы он всегда был под рукой, даже в дороге. Возможность собрать коллег на собрание прямо из «Живой ленты». Проведение его эффективно с помощью сервиса внутренних встреч. Сервис поможет быстро пригласить участников, автоматически разослать повестку и результаты обсуждения, создать события в личных календарях и поставить задачи по итогам совещания.

7. HR: Управление персоналом. Управление структурой компании визуально. Можно просто перетащить компьютерной мышью профиль сотрудника в другой отдел, добавить нового, сменить руководителя. Узнать, кому подчиняется данный сотрудник, найти его поиском, быстро получить все его данные на персональной странице, связаться через портал, получить в справочнике телефон. Синхронизировать контакты с портала с мобильным телефоном, MS Outlook и другими приложениями, чтобы всегда оставаться на связи. Узнать, кто в компании отсутствует, кто в командировке, а кто в декретном отпуске. Распределить отпуска сотрудников, пользуясь графиком отсутствий. Размещать объявления в «Живой ленте» с обязательным условием прочтения. Создавать опросы, чтобы узнать мнение коллег, утвердить документ, провести исследование или просто проголосовать за что-то. Отслеживать активность использования инструментов портала сотрудниками и всей компанией в целом. Награждать сотрудников с помощью «бейджей» и поздравлять их с праздниками.

8. Автоматизация бизнес-процессов компании. Управление через портал самыми разными бизнес-процессами в компании – от отгрузки заказов до взаимодействия с партнерской сетью или клиентами. Использование готовых шаблонов бизнес-процессов или создание своих в визуальном конструкторе. Автоматизирование своих рутинных операций: оформление командировки, отпуска, утверждение и оплата счетов, публикацию официальных приказов и распоряжений. Автоматизирование документооборота в компании с помощью «Универсальных списков». Учёт всех входящих документов и настройка их поэтапной обработки: от получения секретарем до утверждения руководством и передачи в архив. Автоматизация обработки лидов и сделок с помощью бизнес-процессов. Включение в бизнес-процесс всех возможных действий над элементом CRM: разослать письма, назначить ответственных, поставить задачу сотруднику и т.д.

9. Desktopные приложения. Установка десктоп-приложения (для Mac или Windows), чтобы общаться с коллегами, даже если браузер с порталом закрыт. Общение с коллегами: звонки через портал и на мобильные телефоны, приглашение в групповой чат, в том числе с видео, просмотр истории сообщений. Получение самых важных уведомлений о новых событиях в «Живой ленте», лайках и комментариях к ним, о поставленных задачах и ходе их выполнения. Подключение из десктопного приложения и работа с файлами в портале с любого устройства.

10. Мобильные приложения. Установка мобильных приложений (iOS, Android) и работа с порталом с планшета или смартфона: чтение и комментирование «Живой ленты»; управление документами, задачами и файлами. Управление мобильно-клиентской базой CRM, назначение коллегам встреч в календаре, подтверждение своего участия в новых событиях. Возможность делать многое другое, например, отправлять фотографии с телефона прямо в ленту. Push-уведомления позволяют быть в курсе событий в компании и всегда оставаться на связи с коллегами.

11. Интеграция с 1С, Microsoft, Google, Apple. Коробочная версия продукта интегрируется со многими приложениями от ведущих разработчиков программного обеспечения:

- интеграция с MS Office, MS Office Online;
- интеграция с Google Docs;
- интеграция с MS Outlook (контакты, календари);
- интеграция с Google (контакты, календари);
- интеграция с MacOS, iOS, Android;
- коннектор к MS Exchange Server 2007/2010;
- интеграция с MS Exchange Web Mail;
- коннектор к MS SharePoint;
- интеграция с «1С:ЗУП»;
- activeDirectory/LDAPИнтегратор + NTLM.

12. Безопасность и надежность. Это безопасный продукт для совместной работы. Данные будут надежно храниться, и только владелец получит к ним доступ в соответствии с системой прав пользователей. Сотрудники могут спокойно открывать корпоративный портал в кафе, торговых центрах, аэропортах – в незащищенной среде, подключаясь через WiFi или мобильный телефон. Злоумышленники не перехватят их пароли, чтобы использовать в своих целях. Все соединения с порталом производятся с использованием сертификата SSL, что обеспечивает безопасность корпоративной информации и защиту паролей. Продукт обеспечивает максимальную защиту от самых разнообразных угроз безопасности. Проактивный фильтр (WAF – Web Application Firewall) защищает от большинства известных атак на веб-приложения [4].

В результате исследований были сформулированы следующие выводы:

1. Специфика системы управления персоналом в ООО «ТЭК» связана с малым количеством в компании квалифицированного персонала и неразвитой системы менеджмента. Кадровая политика будет направлена на обеспечение престижа компании путем повышения конкурентоспособности, увеличения заработной платы по сравнению с другими отраслями экономики и формированием мотивационных механизмов для закрепления высокопрофессиональных кадров.

2. Основные проблемы кадровой политики ООО «ТЭК», несмотря на большой объем работы, сводятся к недостаточной проработанности механизмов подбора и отбора персонала и повышения квалификации работников в соответствии с компетентностным подходом. Недостаточное внимание уделяется подготовке и развитию кадрового резерва, не определены критерии оценки деятельности персонала.

В результате исследований были сформулированы следующие предложения для ООО «ТЭК»:

1. Использовать критерии оценки деятельности персонала: по уровню добросовестности, толерантности, новаторства, склонности к совмест-

ной работе, стремления к достижениям и ориентации на клиента, по которым можно делать заключение об эффективности работы отдельных работников. Использовать для оценки персонала методику ТПР и критерии эффективности КРІ.

2. Применять в работе, в том числе и для совершенствования системы управления персоналом в ООО «ТЭК» корпоративный портал.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесникова О.А. Управление трудовыми ресурсами: учебное пособие / О.А. Колесникова, А.М. Донецкий. Воронеж, 2010. 128 с.
2. Комиссарова Т.А. Управление человеческими ресурсами. М.: Изд-во «ДЕЛЮ», 2008. 312 с.
3. ГОСТ Р ИСО 9001-2015. Системы менеджмента качества. Требования. Введ. 2015-11-01. М.: ФГУП «Стандартинформ», 2015. 24 с.
4. Коул Д. Управление персоналом в современной организации / пер. с англ. Н.Г. Владимирова. М.: ООО «Вершина», 2009. 352 с.

УДК 004.932

А. Б. Раухваргер, Д. А. Дудин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: abrres@yandex.ru, dudin0da@gmail.com

О РЕГУЛИРОВКЕ КОНТРАСТА ЧЕРНО–БЕЛОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрен способ регулирования общей освещенности и контраста черно-белого цифрового изображения приведением гистограммы яркости к нормальному распределению с задаваемыми параметрами.

Ключевые слова: цифровое изображение, гистограмма яркости изображения, нормальное распределение, обработка цифровых изображений.

A. B. Raukhvarger, D. A. Dudin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: abrres@yandex.ru, dudin0da@gmail.com

ON GRAYSCALE IMAGE CONTRAST ADJUSTMENT USING NORMAL DISTRIBUTION LAW

We consider a grayscale digital image contrast and total illuminance djustment method by bringing the original luma histogram to normal distribution with specified parameters.

Keywords: digital images, image luma histogram, normal distribution, digital image processing.

Обработка цифровых изображений с целью улучшения различимости их деталей актуальна для многих отраслей деятельности, включая, например, криминалистику и медицину. Наиболее перспективное направление в разработке алгоритмов такой обработки основано на идее приближенного приведения гистограмм яркости к заданным распределениям с более широким статистическим разбросом наблюдаемой яркости [1].

Эта идея основана на известной в теории вероятностей формуле преобразования распределения непрерывной случайной величины [2]. Пусть величина y функционально зависит от случайной величины x посредством $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ монотонно возрастающая функция. Тогда для интегральных функций распределения $F(x)$ и $G(y)$ выполняется соотношение

$$G(\varphi(x)) = F(x). \quad (1)$$

Верно и обратное: решение уравнения

$$G(y) = F(x) \quad (2)$$

относительно y дает монотонно возрастающую функцию

$$y = G^{-1}(F(x)), \quad (3)$$

преобразующую случайную величину x , характеризуемую интегральной функцией распределения $F(x)$, в случайную величину y с интегральной функцией распределения $G(y)$.

Гистограммой яркости изображения называют дискретное распределение частот яркости пикселей изображения

$$\omega_i = n_i / n, \quad (4)$$

где i – наблюдаемая яркость пикселя, принимающая значения $0, 1, \dots, 255$; n_i – количество пикселей с яркостью i ; n – полное количество пикселей в изображении.

В модели RGB черно-белому (в оттенках серого) изображению соответствует набор пикселей с равными значениями трех составляющих цвета r , g , и b из набора $0, 1, \dots, 255$, чем и определяется наблюдаемая яркость. Для цветного изображения наблюдаемая яркость пикселя определяется по формуле [3]

$$i = 0,2989r + 0,5870g + 0,1140b. \quad (5)$$

При подсчете частот по формуле (4) это значение следует округлять до целого.

Преобразование исходной гистограммы частот к заданному распределению состоит в присваивании всем пикселям, с каждым значением яр-

кости i , другого значения яркости \tilde{y}_i так, чтобы распределение наиболее приближалось к заданному распределению при сохранении отношений больше – меньше для яркостей любой пары пикселей. Последнее условие представляет собой необходимость сохранения содержания изображения и может быть выражено требованием монотонного возрастания зависимости новой яркости от исходной.

Для непрерывных случайных величин преобразование распределения с выполнением этого условия гарантируется формулой (3). Дискретное распределение можно формально описывать как непрерывное распределение с дифференциальной функцией распределения в виде обобщенной функции, представляющей собой сумму произведений вероятностей дискретных значений на дельта-функции от непрерывной величины, центрированные на возможных дискретных значениях, что в нашем случае дает

$$f(x) = \sum_{i=0}^{255} \omega_i \delta(x-i). \quad (6)$$

Тогда интегральная функция распределения, получаемая интегрированием (6) от $-\infty$ до x , выразится ступенчатым выражением

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad x < 0 \\ \omega_0, \quad 0 \leq x < 1 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=0}^i \omega_k, \quad i \leq x < i+1 \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=0}^{254} \omega_k, \quad 254 \leq x < 255 \\ 1, \quad 255 \leq x \end{array} \right\}. \quad (7)$$

Вычисление по формуле (7) значений $F(x)$ для целых значений $x = i$ от 0 до 255 и подстановка полученных значений в (3) даст выборку y_i значений случайной величины y , распределенной в соответствии с интегральной функцией распределения $G(y)$.

Непосредственно эти значения еще нельзя использовать в качестве новых значений яркости по следующим причинам: они, вообще говоря, не целые, некоторые из них могут оказаться отрицательными, некоторые из них могут оказаться превышающими максимальное значение 255. Дальнейшая обработка этой выборки состоит в следующем:

- значения округляются до целых; при этом во избежание инверсии отношения больше – меньше, должен выполняться одинаковый способ округления для всех значений (по большему ближайшему целому либо по меньшему);
- отрицательные значения должны быть заменены 0;
- значения, превышающие 255, должны быть заменены 255.

В результате такой обработки значений y_i получим для каждого значения исходной яркости i новое значение яркости \tilde{y}_i .

Таким образом, алгоритм обработки цифрового изображения приведением гистограммы к заданному распределению состоит в следующем:

1. Обход всех пикселей изображения с определением частот значений яркости (4);

2. Вычисление значений исходной интегральной функции распределения (7) с подстановкой результатов в (3) для определения предварительных значений новой яркости для всех значений исходной яркости;

3. Дополнительная обработка предварительных значений новой яркости для получения окончательных целых значений новой яркости в диапазоне от 0 до 255;

4. Повторный обход всех пикселей изображения с заменой яркости каждого пикселя на новое значение.

Последний пункт легко реализуется для изображений в оттенках серого, но для цветных изображений возникают дополнительные проблемы с подгонкой составляющих r , g и b для получения нужной новой яркости по формуле (5), при сохранении соотношений между ними. Эти проблемы решаются по-разному, но всегда остается возможность дополнительных искажений нового изображения (артефактов).

Различные варианты такого алгоритма отличаются разными функциями $G(y)$. Наиболее широко используется приведение к равномерному распределению на отрезке $[0, 255]$, а также использование экспоненциального распределения. Эти случаи просты в реализации, так как вычисление (3) в этих случаях производится по аналитически полученным формулам. Недостаток этих методов состоит в том, что при приведении к равномерному распределению нет возможности регулировки, так как оно непараметрическое, а в случае экспоненциального распределения есть только один параметр регулировки, определяющий как среднюю яркость, так и разброс возможных значений.

Нами исследована возможность регулирования контраста и общей освещенности черно- белых (в оттенках серого) изображений приведением гистограммы яркости к нормальному распределению. Основанием такого подхода является простой факт наличия у нормального распределения

двух параметров, один из которых отвечает за среднее значение (математическое ожидание m), другой (среднеквадратичное отклонение σ) – за ширину статистического разброса возможных значений, что позволяет независимо управлять общей освещенностью изображения, определяемой параметром m , и его контрастностью, через параметр σ .

Интегральная функция нормального распределения определяется выражением

$$G(y) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y - m}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right], \quad (8)$$

где $\operatorname{erf}(z)$ - функция ошибок. Тогда (3) принимает вид

$$y = m + \sigma\sqrt{2}\operatorname{erf}^{-1}(2F(x) - 1). \quad (9)$$

Создана программа, производящая обработку изображения по рассматриваемому алгоритму с вычислением предварительных значений новой яркости в пункте 2 по формуле (9) с использованием модуля численного вычисления обратной функции ошибок, при задаваемых значениях m и σ .

Проведена серия опытов по обработке изображений с помощью разработанной программы. Было подтверждено, что, варьируя значения параметров m и σ , можно получать близкие к ожидаемым общую освещенность и контрастность. В некоторых случаях, подбором значений параметров удавалось добиться лучшей различимости деталей изображения, чем при приведении к равномерному распределению.

Обнаружено, что наиболее адекватное регулирование осуществляется для изображений, исходные гистограммы, яркости которых уже близки к нормальным (не в смысле критериального соответствия, но имеющие явно выраженное преобладание частот в некоторой области диапазона $[0, 255]$ с преимущественным уменьшением частот при удалении от этой области).

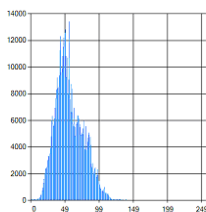
На рис. 1 приведен пример результатов обработки исходного темного и слабоконтрастного изображения такого типа при различных значениях параметров с представлением гистограмм яркости.

При увеличении m происходит сдвиг гистограммы вправо, соответственно увеличивается общая освещенность изображения, а увеличение σ приводит к расширению гистограммы, что проявляется в большей контрастности изображения.

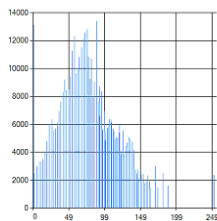
При этом последовательно улучшается различимость деталей изображения, в частности, все более отчетливо распознается автомобиль на противоположном берегу озера.



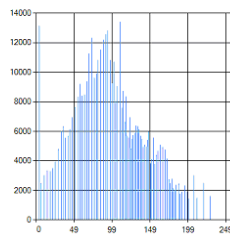
а)



б)



в)



г)

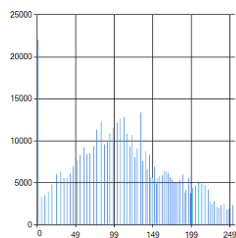


Рис. 1. Исходное изображение (а) и результаты обработки с различными параметрами (б):
 $m = 80$ и $\sigma = 42$; (в) $m = 100$, $\sigma = 50$; (г) $m = 120$, $\sigma = 70$

Таким образом, можно заключить, что предложенный подход может эффективно применяться для регулирования общей освещенности и контраста изображений в оттенках серого с целью улучшения различимости деталей изображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
2. Агекян Т.А. Теория вероятностей для астрономов и физиков. М.: Наука, 1974. 264 с.
3. Rec. ITU-R BT.601-7 Studio encoding parameters of digital television for standard 4:3 and wide-screen 16:9 aspect ratios. ITU, 2017. P. 3-4.

УДК 681.518

В. Ю. Жарехина, А. П. Харитонов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: lera.zh@mail.ru, haritonovap@ystu.ru

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КЛИЕНТСКОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ И УЧЕТА ПРОДУКЦИИ В ПРОЦЕССЕ ПРОИЗВОДСТВА ЛАКА

В работе представлено проектирование структуры клиентской части информационной системы на базе объектно-ориентированного подхода в форме диаграмм состояний и классов.

Ключевые слова: автоматизированная информационная система, объектно-ориентированное проектирование, диаграмма классов, диаграмма состояний.

V. Y. Zharekhina, A. P. Kharitonov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: lera.zh@mail.ru, haritonovap@ystu.ru

DESIGN OF CLIENT SOFTWARE OF AUTOMATED INFORMATION SYSTEM OF CONTROL AND ACCOUNTING PRODUCTS IN THE LACQUER PRODUCTION PROCESS

The paper shows the formation of structure of the client part of the information system on the basis of object-oriented approach in the form of charts of states and classes.

Keywords: automated information system, object-oriented design, chart of classes, chart of states.

Синтез основы лака является одним из основных процессов лакокрасочного производства. Он состоит из четырех стадий. На первой стадии осуществляется проверка качества сырья по нормативным показателям, его распределение и хранение на складе с последующим дозированием и загрузкой в реакционное оборудование. На второй стадии происходит непосредственно синтез основы лака в реакторе периодического действия с индукционным обогревом. В зависимости от рецептуры и метода синтеза выбирается температурный режим, периодически осуществляется контроль показателей качества для принятия оперативных решений по коррекции технологического режима процесса и по его завершению. Третьей стадией является растворение основы лака и постановка лака на тип. На завершающей стадии осуществляется очистка лака и транспортировка его в цех-потребитель или на склад.

В качестве критериев эффективности процесса примем показатели качества конечного продукта, такие как вязкость, кислотное число, массовая доля нелетучих веществ и ряд других. На процесс действует большое число сильных возмущений, связанных с нестабильностью технологических режимов отдельных стадий, изменяющимися свойствами сырья и компонентов и многими другими причинами. Поэтому для получения продукта заданного качества требуется контроль на отдельных этапах и оперативная коррекция режима проведения процесса, состава и количества добавляемых компонентов.

В существующей на производстве системе автоматизации реализация этих функций основана на использовании технологических карт, которые содержат всю необходимую информацию для принятия решений. Однако эти карты заполняются вручную, хранятся только в бумажном варианте, что усложняет формирование отчетности, проверку правильности данных и решение других задач оперативного управления. Поэтому актуальной является разработка автоматизированной информационной системы для работы со всей необходимой информацией на основе электронного представления технологических карт. Такой подход дает возможность повысить эффективность принятия решений по контролю и управлению процессом за счет уменьшения количества ошибок и сокращения времени на ввод и обработку исходных данных, кроме того появляется возможность создания экспертной системы для поддержки принятия управленческих решений.

Для автоматизации работы персонала с технологическими картами предлагается использовать распределенную систему с клиент-серверной архитектурой [1]. Для создания этой системы необходима разработка её информационной модели с использованием методов объектно-ориентированного проектирования, основными этапами которого является формирование концептуального и логического представлений системы [2]. На следующем этапе разработки необходимо выполнить проектирование клиентской части системы.

Средства реализации клиентского приложения включают два уровня (рис. 1): на нижнем уровне на базе стандартных протоколов и сетевой подсистемы Oracle организуется взаимодействие отдельных узлов, далее следует уровень прикладных библиотек, которые обеспечивают доступ к серверу для выбранного языка и среды разработки.

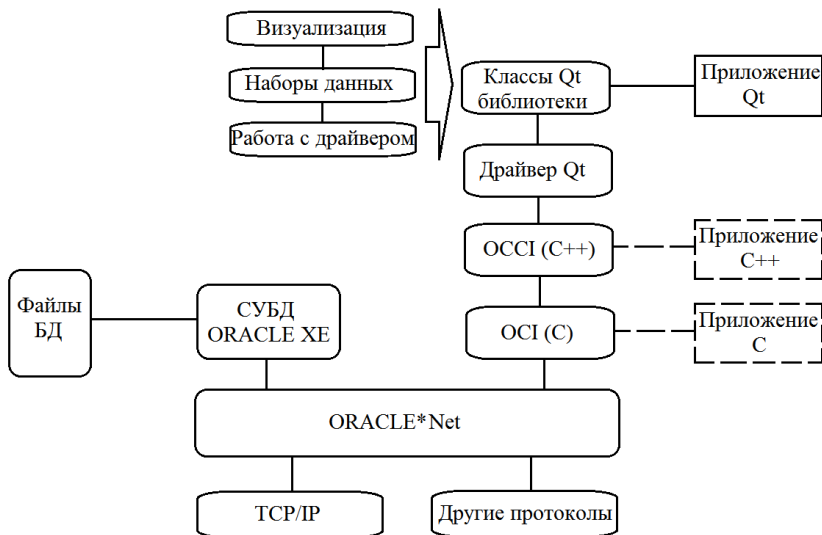


Рис. 1. Информационное обеспечение

Основной технологией для организации сетевых взаимодействий является стек TCP/IP. Для устранения проблем, связанных с необходимостью частых изменений настроек протоколов, используется дополнительный слой программного обеспечения ORACLE*NET. Он позволяет вынести конфигурационную информацию из приложений и через единую точку подключения взаимодействовать с любыми узлами распределенной системы.

Базовым средством для работы с сервером ORACLE является интерфейс удаленных вызовов OCI. Он представляет собой динамически подключаемую библиотеку (.dll), в которой реализованы все функции по доступу к данным. Для работы с OCI достаточно подключить соответствующий заголовочный файл к C-программе. Однако работа на этом уровне требует учета большого количества технических особенностей, необходимо в явном виде запрашивать и освобождать ресурсы, контролировать режимы взаимодействия с сервером и т.д., что может оказаться неэффективным, особенно при разработке сложных приложений. Поэтому разработан следующий уровень OCCI, который

представляет собой объектно-ориентированную библиотеку, классы которой инкапсулируют функции ОСИ. Работа с интерфейсом ОССИ ведется на языке С++ путем последовательного создания и использования объектов, таких как соединение, набор данных и т.п.

Для реализации графического пользовательского интерфейса необходим следующий уровень программного обеспечения, который предоставляется высокоуровневыми библиотеками сред разработки приложений. В среде Qt он состоит из драйверов для работы с конкретным сервером базы данных и средств для работы с наборами данных и их визуализацией.

Взаимодействие пользователя с интерфейсной частью системы представлено в виде диаграммы состояний (рис. 2). Работа пользователя начинается с регистрации или аутентификации, при успешном прохождении которой происходит переход в главное окно программы. Главное окно периодически обеспечивает обновление списка событий.

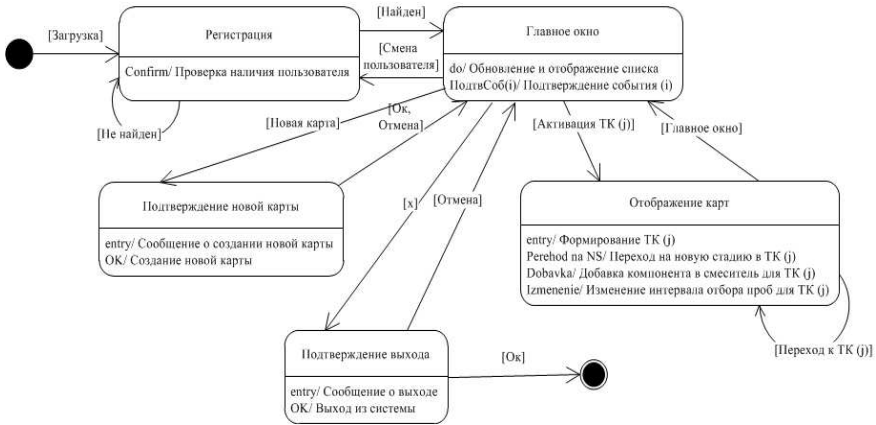


Рис. 2. Диаграмма состояний

Пользователь может подтвердить одно из событий и перейти к соответствующей ему технологической карте путём выбора нужной вкладки. При открытии технологической карты происходит обновление информации и пользователю предоставляется возможность подтвердить завершение отдельной стадии, назначить добавки, определить время отбора проб и осуществить другие операции. После завершения работы с текущей картой можно перейти к другой или вернуться в главное окно. На главном окне можно создать новую карту (создание происходит после подтверждения операции), выйти из приложения, или сменить пользователя. Выход из приложения очищает список событий интерфейса, а смена пользователя его сохраняет.

Клиентское приложение технолога должно обеспечивать работу с несколькими технологическими картами, обновлять информацию в соответствии с изменениями параметров процесса и информировать технолога о событиях интерфейса. Реализация этих функций представлена на диаграмме классов (рис. 3). Приложение имеет главное окно (MainWindow), созданное на базе стандартного класса QMainWindow библиотеки Qt. Доступ к отдельным технологическим картам организован с помощью закладок (QTabWidget). Первая закладка предназначена для работы с общей информацией. Отдельные технологические карты реализуются в виде документа .xls по шаблону и отображаются с использованием компонента QAxWidget.

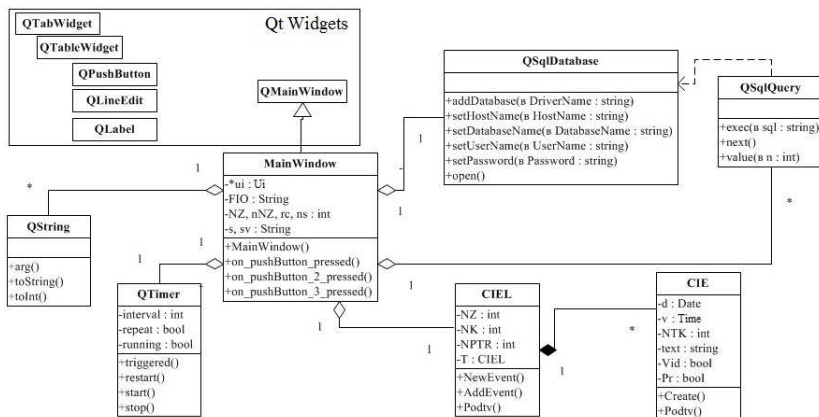


Рис. 3. Диаграмма классов

Приложение извлекает информацию из базы данных и по шаблону формирует визуальное представление технологических карт. Для взаимодействия с базой данных используется класс QSqlDataBase, а для формирования запросов и доступа к наборам данных класс QSqlQuery.

Для ввода информации о новой технологической карте, для подтверждения завершения стадий и для реализации других аналогичных функций используются стандартные элементы управления, работа с которыми осуществляется с помощью классов QPushButton, QLineEdit, QLabel.

Для помощи технологу в контроле изменений технологических карт предусмотрен список событий интерфейса, реализованный в виде трех классов:

- CIE (событие интерфейса) используется для представления информации об отдельном событии: дата и время происхождения события, номер карты, к которому это событие привязано, текст с описанием события, признак подтверждения и приоритет. Событие создается по шаблону.

- CIEL (список событий интерфейса) является диспетчером событий и отвечает за обнаружение новых событий, за ведение списка событий и за другие функции. Новое событие находится при периодическом опросе таблиц базы данных путем сравнения текущего количества записей в них с тем, которое было на момент инициализации списка событий. Также предусмотрено подтверждение события пользователем, после чего меняется правило его отображения в списке.

- QTable (таблица, библиотека Qt) предназначен для визуального отображения списка событий в главном окне приложения. Новые события добавляются в верхнюю строку, вытесняя нижние. Порядок вытеснения определяется приоритетом и признаком подтверждения события. Сначала вытесняются подтвержденные события, а затем низкоприоритетные. Высокоприоритетные события остаются до момента подтверждения или до полного заполнения ими списка. Если весь список заполнен высокоприоритетными событиями, то нижние вытесняются при появлении новых, даже если не были подтверждены.

Для периодизации опроса базы данных используется класс QTimer, для работы со строками QString.

Таким образом, разработаны динамическая и статическая логические модели клиентской части. На следующем этапе работы они будут использованы для реализации системы с использованием выбранных программных средств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жарехина В.Ю.* Автоматизация контроля и учета продукции в процессе производства лака / В.Ю. Жарехина, А.П. Харитонов // Юбилейная семидесятая всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов с международ. участием «Научно-технические и инженерные разработки – основа решения современных экологических проблем». 19 апреля 2017 г., Ярославль: сб. материалов конф. [Электронный ресурс]. Ч. 2. Ярославль, Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 241–244. Режим доступа: http://www.ystu.ru/download/2_Sbornik_materialov_70_Conf_2017.PDF
2. *Жарехина В.Ю.* Информационная модель автоматизированной системы контроля и учета продукции в процессе производства лака / В.Ю. Жарехина, А.П. Харитонов // Семьдесят первая всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунаур. участием. 18 апреля 2018., г. Ярославль: сб. материалов конф. В 3 ч. Ч. 2. [Электронный ресурс]. Ярославль, Издат. дом ЯГТУ, 2018. С. 330-333. Режим доступа: http://www.ystu.ru/download/2_Sbornik_materialov_71_Conf_2018.PDF

УДК 681.518

С. А. Кравченко, А. П. Харитонов

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: mishkamsf@gmail.com,*
haritonovap@ystu.ru

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И УЧЁТА УЧЕБНОЙ НАГРУЗКИ КАФЕДРЫ ВУЗА

Представлены результаты разработки концептуальной модели, которая необходима для реализации автоматизированной информационной системы расчёта, распределения и учёта учебной нагрузки кафедры.

***Ключевые слова:** автоматизированная информационная система, распределение учебной нагрузки, моделирование информационных процессов.*

S. A. Kravchenko, A. P. Kharitonov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, *e-mail: mishkamsf@gmail.com,*
haritonovap@ystu.ru

CONCEPTUAL MODEL OF THE INFORMATION SYSTEM OF DISTRIBUTION AND ACCOUNTING OF THE ACADEMIC LOAD OF THE UNIVERSITY DEPARTMENT

We present the results of the conceptual model development, which is necessary for the implementation of an automated information system for calculating, distributing and accounting for the academic load of the department.

***Keywords:** automated information system, distribution of educational load, modeling of information processes.*

Деятельность вуза включает большой объем организационной работы, связанной с реализацией комплекса информационных процессов, направленных на поддержку и обеспечение реализации требований федеральных государственных образовательных стандартов. Одной из наиболее ресурсоёмких стадий этой деятельности является формирование учебной нагрузки.

Работа с учебной нагрузкой на уровне кафедры начинается с получения из деканатов кафедральной нагрузки на учебный год. Кафедральная нагрузка предоставляется деканатами в форме бумажных документов, которые обладают близкой, но не одинаковой структурой представления информации. На первом этапе эти документы обобщаются

и представляются в форме единого сводного документа, на основе которого определяется суммарная кафедральная нагрузка и происходит её предварительное распределение по преподавателям. Далее следует этап согласования с ПФУ, по результатам которого формируется штатное расписание и принимается окончательное решение о нагрузке преподавателей на соответствующий учебный год (рис. 1). При распределении нагрузки по преподавателям учитывается форма занятости преподавателя (штатный, совместитель и т.д.), объем ставки, читаемые преподавателем дисциплины и ряд других, часто трудно формализуемых факторов. По итогам распределения нагрузки преподавателю должна быть запланирована работа в объёме, соответствующем величине ставки, на которую он работает, или для преподавателя должен быть определен объём ставки, соответствующий предусмотренной нагрузке.

Распределение нагрузки носит итерационный характер, окончательное решение принимается после нескольких, зачастую многочисленных этапов согласования с различными участниками процесса. Более того, в начале учебного года, а также в течение учебного года могут происходить изменения, требующие корректировки учебной нагрузки. В качестве примера можно привести изменение контингента обучающихся, изменение состава преподавателей кафедры и ряд других.



Рис. 1. Структурная схема процесса формирования учебной нагрузки кафедры

При текущей организации работы по распределению и учету учебной нагрузки кафедр вуза (ЯГТУ) имеет место значительная неорганизованность основных процессов. Это связано с тем, что исходная (учебные планы, нагрузка, поступающая из деканатов и т.д.), оперативная

(текущие данные по распределению нагрузки преподавателей, состав преподавателей кафедры) и итоговая (штатное расписание кафедры, суммарная нагрузка кафедры) информация обрабатывается в различном виде отдельными структурными подразделениями. Реализуемые подразделениями способы представления информации и последовательности операций по обработке информации являются в значительной мере субъективными. Значительные затраты трудовых ресурсов на выполнение работ по расчёту и распределению учебной нагрузки, а также низкое качество реализации процесса распределения учебной нагрузки (нарушение нормативных сроков, наличие ошибок в результатах распределения нагрузки) существенно снижают эффективность работы.

Устранить указанные недостатки можно автоматизацией части функций на основе электронного документооборота [1]. Следовательно, требуется разработка соответствующей автоматизированной информационной системы. Она должна строиться по клиент-серверной архитектуре [2] и может быть функционально разделена на три крупные подсистемы: подсистема формирования кафедральной нагрузки, подсистема формирования штатного состава и подсистема распределения нагрузки (рис. 2).

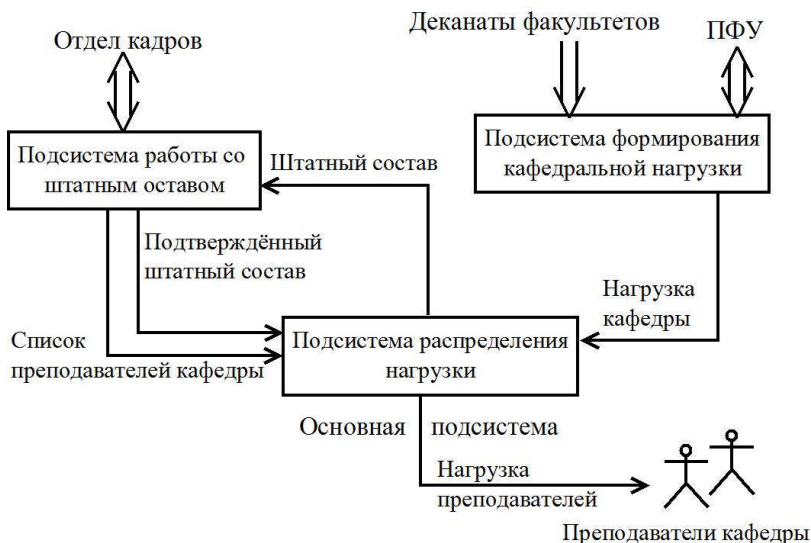


Рис. 2. Основные информационные подсистемы

Первая подсистема отвечает за расчет объема часов по каждому виду занятия и по каждой дисциплине на основе нагрузки, полученной из деканатов, и нормативных данных по расчету затрат времени. Штатный

состав формируется так, чтобы обеспечивался баланс между суммарной нагрузкой кафедры и плановым объемом работ всех преподавателей с учетом форм занятости и объема ставок. Распределение кафедральной нагрузки по преподавателям, в соответствие со штатным составом, осуществляется при помощи третьей подсистемы. Методист кафедры взаимодействует со всеми указанными подсистемами на различных стадиях формирования и распределения кафедральной нагрузки.

Разрабатываемая информационная система имеет сложный состав, структуру и архитектуру. Поэтому для её проектирования целесообразно использовать методы объектно-ориентированного подхода, которые предполагают последовательную разработку концептуального, логического [3] и физического [2] представления системы.

Концептуальная модель системы предполагает определение основных функций и внешних сущностей, взаимодействующих с системой. Она представляет собой наиболее общее описание, на базе которого строятся все остальные модели (рис. 3).

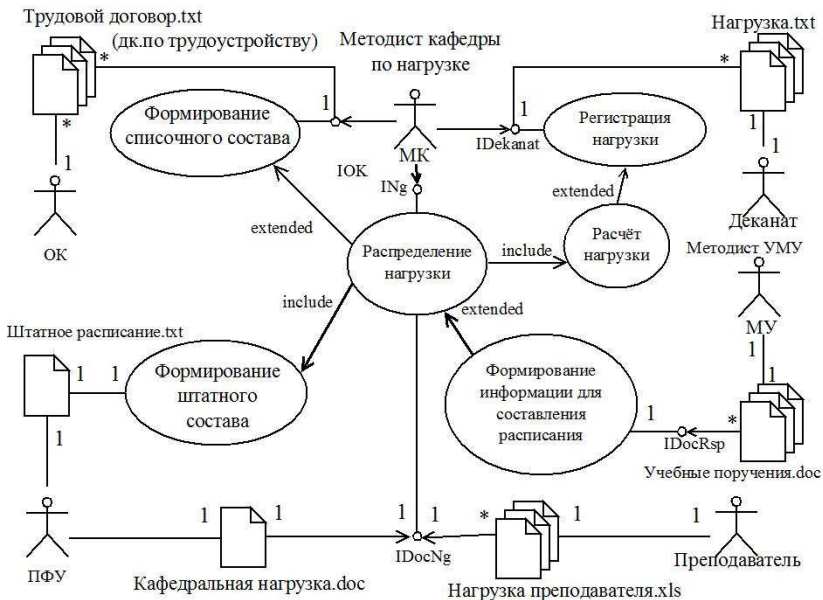


Рис. 3. Диаграмма вариантов использования

Планирование нагрузки преподавателей кафедры проводится на основе нагрузки из деканатов и штатного состава кафедры. Распределение нагрузки преподавателям формируется на учебный год с учетом списочного состава преподавателей кафедры.

Практически всегда в силу ряда причин, которые могут зависеть от субъективных факторов, связанных с преподавателями, от решений на уровне кафедры, факультета, вуза и министерства в исходные документы в течение учебного года могут вноситься изменения, что приводит к необходимости оперативной и согласованной корректировке распределения нагрузки преподавателей.

По мере выполнения учебной нагрузки и (главное) по завершении отчётного периода в конце учебного года необходимо формировать отчётную документацию, отражающую учёт фактического выполнения запланированных объёмов работ.

Таким образом, разработана концептуальная модель системы расчёта, распределения и учёта учебной нагрузки, на основе которой разработаны модели и структуры данных и выполнена реализация клиентской и серверной части системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравченко С.А.* Управление распределением учебной нагрузки кафедры ВУЗа на базе автоматизированного документооборота / С.А. Кравченко, А.П. Харитонов // Юбилейная семидесятая всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учеб. заведений с междунар. участием «Науч.-техн. и инженер. разработки – основа решения современных экологических проблем». 19 апреля 2017 г., Ярославль: сб. материалов конф. [Электронный ресурс]. Ч. 2. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 245–247. Режим доступа: http://www.ystu.ru/download/2_Sbornik_materialov_70_Conf_2017.PDF
2. *Кравченко С.А.* Принцип построения информационной системы контроля и учета штатного состава учебной кафедры ВУЗа / С.А. Кравченко, А.П. Харитонов // Шестидесят девятая всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунар. участием. 20 апреля 2016 г, Ярославль: сб. материалов конф. [Электронный ресурс]. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 633-635. Режим доступа: URL: http://www.ystu.ru/download/Sbornik_materialov_69_Conf_2016.pdf
3. *Кравченко С.А.* Информационная модель процесса расчёта, распределения и учёта учебной нагрузки кафедры ВУЗа / С.А. Кравченко, А.П. Харитонов// Семьдесят первая всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунар. участием. 18 апреля 2018 г., Ярославль: сб. материалов конф. В 3 ч. Ч.2 [Электронный ресурс]. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ. 2018. С. 334-337. Режим доступа: http://www.ystu.ru/download/2_Sbornik_materialov_71_Conf_2018.pdf

УДК 681.51

О. Ю. Марьясин¹, А. С. Колодкина², А. А. Огарков¹

¹Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: maryasinou@ystu.ru, drivemox@mail.ru

²Ярославский промышленно-экономический колледж,
Россия, Ярославль, e-mail: anuta__25@mail.ru

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

В работе рассмотрены различные варианты практической реализации методов прогнозирующего управления. Наиболее просто эти методы могут быть реализованы с помощью пакета MATLAB. MATLAB имеет богатый выбор инструментов для работы с MPC-контроллерами. Альтернативным вариантом является использование специализированных библиотек для универсальных языков программирования. Наиболее удобным и перспективным языком программирования для этого является язык Python.

Ключевые слова: MPC, MATLAB, Simulink, MPC Toolbox, Python.

O. Yu. Maryasin¹, A. S. Kolodkina², A.A. Ogarkov¹

¹Yaroslavl State Technical University,
Russia, Yaroslavl, e-mail: maryasinou@ystu.ru, drivemox@mail.ru

²Yaroslavl Industrial and Economical College,
Russia, Yaroslavl, e-mail: anuta__25@mail.ru

PRACTICAL IMPLEMENTATION OF MODEL PREDICTIVE CONTROL METHODS

The paper considers various variants for practical implementation of model predictive control methods. Most easily, these methods can be implemented using the MATLAB package. MATLAB has a wide range of tools for working with MPC controllers. An alternative is to use specialized libraries for universal programming languages. The most convenient and promising programming language for this is the Python language.

Keywords: MPC, MATLAB, Simulink, MPC Toolbox, Python.

Постоянные требования к росту эффективности производства, повышению качества выпускаемой продукции, с одной стороны, массовое внедрение киберфизических систем, наступление четвертой промышленной революции и переход к цифровой экономике, с другой, стимулируют развитие и внедрение на практике современных методов оптимального и

адаптивного управления технологическими процессами и техническими системами.

В зарубежной научной прессе, в последнее время, активно обсуждается подход к оптимальному управлению, использующий прогнозирующие модели. Этот подход получил название Model Predictive Control (МРС) [1]. Он уже давно хорошо зарекомендовал себя при применении в других областях, например в нефтехимии [2]. К достоинствам МРС-подхода можно отнести то, что оптимальный регулятор, синтезированный в соответствии с данным подходом, обеспечивает отсутствие в системе статической ошибки, соблюдение ограничений на управляющие и выходные переменные, а также компромисс между робастностью и качеством регулирования. Однако, как и большинство оптимальных систем, он требует знания модели объекта управления. И здесь достоинством МРС-подхода является то, что поскольку он реализует закон управления с обратной связью по состоянию и управление рассматривается и реализуется на очень коротком промежутке времени, то для синтеза управления достаточно использовать лишь приближенные линейные модели. Кроме того, прогнозирующие свойства МРС-регулятора позволяют эффективно подавлять контролируемые возмущения, учитываемые в модели.

Одной из причин, препятствующей широкому распространению МРС-подхода на практике является сложность реализации МРС-алгоритма, так как при этом выполняется большой объем операций с векторами и матрицами и может решаться задача математического программирования. Поэтому при реализации МРС-алгоритма на базе ПЛК или свободно-программируемых контроллеров, которые сейчас широко используются в системах управления, могут возникнуть проблемы, связанные с нехваткой вычислительных ресурсов.

Решением указанной проблемы может быть использование двух-уровневого подхода, представленного в работе [3]. Данный подход в зарубежной прессе получил название plantwide optimization. В этом случае, система управления будет включать два уровня иерархии. На верхнем уровне решается задача оптимального прогнозирующего управления. Эта задача может быть реализована на базе высокопроизводительных персональных или промышленных компьютеров. В результате решения задачи верхнего уровня определяются оптимальные значения технологических параметров, которые, в качестве заданий, передаются на нижний уровень. На нижнем уровне решается задача автоматического управления в соответствии с заданными значениями, полученными от верхнего уровня. Эта задача решается традиционными средствами автоматизации. В качестве законов управления здесь чаще всего применяются алгоритмы ПИ или ПИД-регулирования. Данный подход описывается схемой, показанной на рис. 1. Применение указанного подхода позволяет существенно снизить ограничения на сложность применяемых алгоритмов оптимального управления.

Проще всего MPC-алгоритмы могут быть реализованы с помощью специальных пакетов для научных и инженерных расчетов. Наиболее известным инструментом для проектирования и моделирования MPC-контроллеров является Model Predictive Control Toolbox [4] пакета MATLAB.

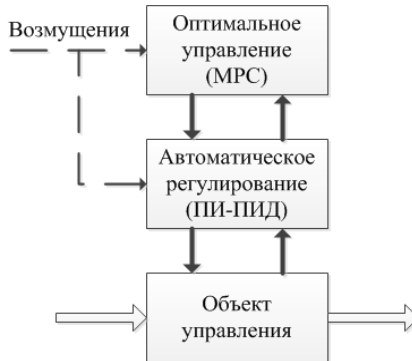


Рис. 1. Двухуровневая схема системы оптимального прогнозирующего управления

MPC Toolbox включает команды, которые могут выполняться как режиме командной строки, так и в программах на языке MATLAB. Кроме того, MPC Toolbox включает блок MPC Controller для системы Simulink. В новых версиях пакета MATLAB/Simulink дополнительно появились блоки Multiple MPC Controller, Adaptive MPC Controller и Explicit MPC Controller. Блок Multiple MPC Controller позволяет реализовать управление объектом, используя целое множество MPC-контроллеров, с возможностью оперативного переключения между различными вариантами MPC-контроллеров в режиме моделирования. Этот блок может применяться для управления существенно нелинейными объектами. Блок Adaptive MPC Controller позволяет производить адаптацию внутренней модели MPC-контроллера для управления нелинейными или нестационарными объектами. Применение блока Explicit MPC Controller позволяет сократить время расчета оптимального управления. Этот блок может использоваться для управления “быстрыми” объектами с малым периодом дискретизации.

Для создания MPC-контроллера в режиме командной строки или программе MATLAB используется функция `mpc`. В качестве параметра этой функции необходимо задать линейную стационарную модель (linear time-invariant – LTI) объекта управления, представленную в непрерывной или дискретной форме. Для непрерывной модели необходимо дополнительно указать период дискретизации. Кроме того, в списке параметров

могут быть указаны горизонт прогнозирования и горизонт управления, а также ограничения, накладываемые на выходные и управляющие переменные. В результате выполнения функции `mpc` создается объект MPC Controller, который затем может использоваться для проведения расчетов в MATLAB или Simulink.

Для создания MPC-контроллера в среде MATLAB можно также воспользоваться графическим приложением MPC Design Tool, вызываемым по команде `mpctool`. Это приложение является частью приложения Control and Estimation Tools Manager. Вид главного окна данного приложения показан на рис. 2.

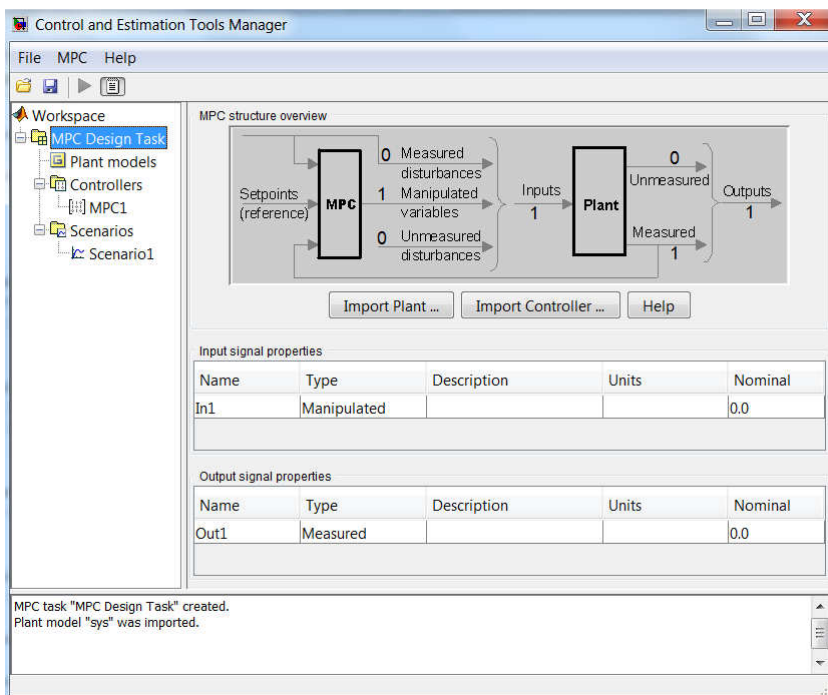


Рис. 2. Вид приложения MPC Design Tool

С помощью графического приложения можно произвести импорт LTI-модели объекта из рабочей области MATLAB, изменить параметры MPC-контроллера, задавать ограничения на управляющие и выходные переменные, настраивать весовые коэффициенты критерия оптимальности MPC контроллера, выполнить расчет и моделирование замкнутой системы регулирования с MPC-контроллером по заданному сценарию. Синтезиро-

ванный MPC-контроллер можно экспортировать в рабочую область MATLAB.

В новых версиях системы MATLAB (начиная с версии R2015) команда `mrctool` больше не поддерживается. В место нее используется команда `mrctDesigner` для вызова графического приложения MPC Designer. Данное графическое приложение позволяет выполнять те же функции что и приложение MPC Design Tool.

Для расчета и моделирования замкнутой системы регулирования с MPC контроллером в режиме командной строки или программе MATLAB используется функция `sim`. В качестве параметров этой функции указывается используемый MPC-контроллер, время моделирования и сигнал, определяющий задание MPC-контроллеру. Для вычисления значений оптимального управления в режиме реального времени функция `sim` не подходит. В этом случае необходимо использовать функцию `mrctmove`. Функция `mrctmove` производит вычисление значений оптимального управления на каждом шаге MPC-алгоритма, используя информацию о векторе переменных состояния объекта управления, выходных измеряемых переменных, сигналах задания и возмущения. При каждом выполнении функции `mrctmove` информация о векторе переменных состояния автоматически обновляется.

Пример блок-диаграммы Simulink замкнутой системы регулирования, реализованной с помощью блока MPC Controller, показан на рис. 3. На вход блока MPC Controller подаются сигналы с выхода объекта, сигнал задания и сигнал возмущения, действующего на объект.

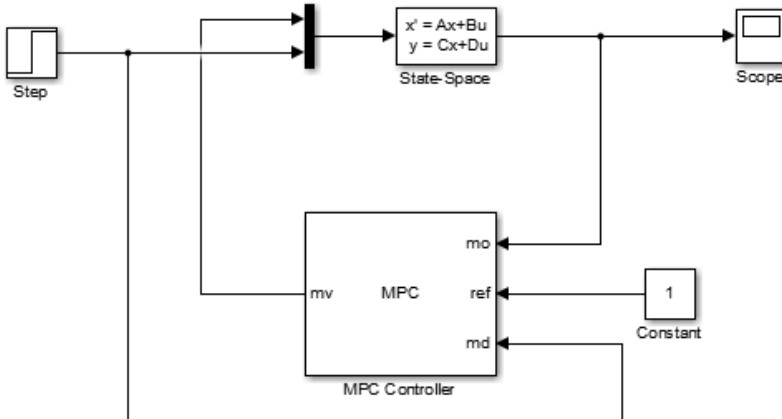


Рис. 3. Блок-диаграмма Simulink с блоком MPC Controller

Переходный процесс на выходе объекта в замкнутой системе регулирования с MPC-контроллером показан на рис. 4. Для сравнения на этом

же рисунке пунктирной линией показан график переходного процесса для MPC-контроллера, не учитывающего влияние внешнего возмущения, действующего на объект. Прогнозирующие свойства MPC-контроллера позволяют практически исключить влияние сильнейшего возмущения, которое по величине десятикратно превышает сигнал задания, на выход объекта управления. Данный пример отлично иллюстрирует возможности MPC-контроллеров по подавлению внешних измеряемых возмущений.

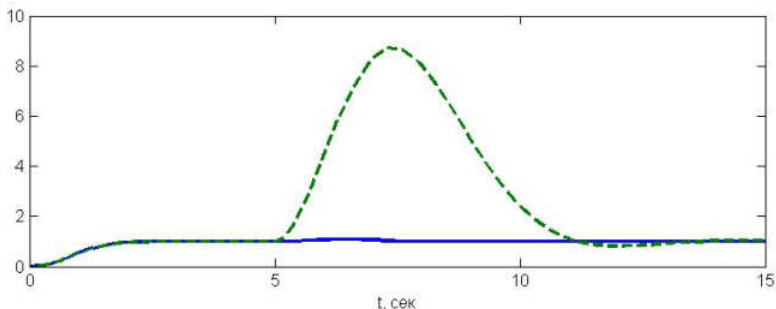


Рис. 4. Переходные процессы на выходе объекта

Примеры моделирования систем управления реальными объектами с использованием MPC-контроллеров, реализованных средствами MPC Toolbox приведены в работах [5, 6]. В работе [5] описывается модель системы управления тепловым режимом здания на базе MPC-регулятора. В модели имитируется энергоэффективный режим так называемого “прерывистого” отопления, когда задание регулятору по температуре в помещении снижается в нерабочее время суток (ночью). Расчеты показали, что MPC-регулятор позволяет получить, по сравнению с другими алгоритмами, наилучшее качество регулирования при высокой экономии тепла. В работе [6] были разработаны компьютерные модели системы управления тепловым режимом многосекционного здания в системе MATLAB/Simulink. Компьютерные модели различались по виду использованного MPC-алгоритма: централизованного, децентрализованного, распределенного и иерархического распределенного.

Другим популярным инструментом для проектирования и моделирования MPC-контроллеров для MATLAB/Simulink является Hybrid Toolbox [7], разработанный Альберто Бемпорад, который также является одним из авторов MPC Toolbox. Hybrid Toolbox поддерживает проектирование как традиционных, так и гибридных MPC-контроллеров. В основе гибридных MPC-контроллеров лежат логико-динамические модели. Логико-динамические модели позволяют описывать непрерывно-дискретные или гибридные системы, поведение которых может описываться как непрерывными, так и дискретными процессами. Общее поведение гибридной

системы описывается последовательностью локальных поведений отдельных элементов, смена которых происходит под воздействием событий. Наступление того или иного события может зависеть от поступления внешних сигналов, а может быть привязано ко времени или зависеть от значений различных параметров.

Логико-динамические модели формально могут быть описаны как дискретные гибридные автоматы (Discrete Hybrid Automata - ДНА) [8]. Частным случаем ДНА является класс кусочно-аффинных (Piecewise Affine - PWA) систем [9]. Такие системы часто также называют переключаемыми линейными системами (Switched Linear Systems). Согласно работе [10] систему логических условий можно преобразовать в систему целочисленных линейных неравенств, а логико-динамическую модель в смешанную логико-динамическую (Mixed Logical Dynamical - MDL) модель вида

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + B_1u(k) + B_2\delta(k) + B_3z(k), \\y(k) &= Cx(k) + D_1u(k) + D_2\delta(k) + D_1z(k), \\E_2\delta(k) + E_3z(k) &\leq E_1u(k) + E_4x(k) + E_5,\end{aligned}$$

где $x(k)$ – вектор переменных состояния; $u(k)$ – вектор управления; $\delta(k)$ – бинарная логическая переменная $\delta_1 \in \{0, 1\}$; $y(k)$ – вектор выходных (контролируемых) переменных; $z(k)$ – вектор дополнительных переменных состояния.

Hybrid Toolbox поддерживает MDL и PWA формы моделей. Для описания логико-динамических моделей используется специальный язык моделирования HYSDEL. Пример решения задачи управления тепловым режимом помещения с помощью воздухонагревателя и воздухоохладителя, работающих в режиме включено/выключено с использованием Hybrid Toolbox представлен на рис. 5. На рис. 5 слева показано описание логико-динамической модели на языке HYSDEL, в центре показаны профили температур, а справа – разбиение области переменных состояния на зоны, между которыми производится переключение при наступлении событий.

В зависимости от постановки, задача синтеза MPC-контроллера может быть сведена к задаче линейного, квадратичного или смешанного целочисленного программирования. Пакет MATLAB в составе Optimization Toolbox и MPC Toolbox включает решатели задач линейного и квадратичного программирования. Однако часто их возможностей или их эффективности бывает недостаточно. Поэтому Hybrid Toolbox поддерживает внешние популярные коммерческие решатели для решения задач линейного, квадратичного и смешанного целочисленного программирования, такие как CPLEX, Xpress, Gurobi и другие.

Таким образом, Hybrid Toolbox может использоваться для управления как простыми, так и достаточно сложными гибридными динамически-

ми системами. К недостаткам Hybrid Toolbox можно отнести некоторые ограничения связанные с языком HYSDEL.

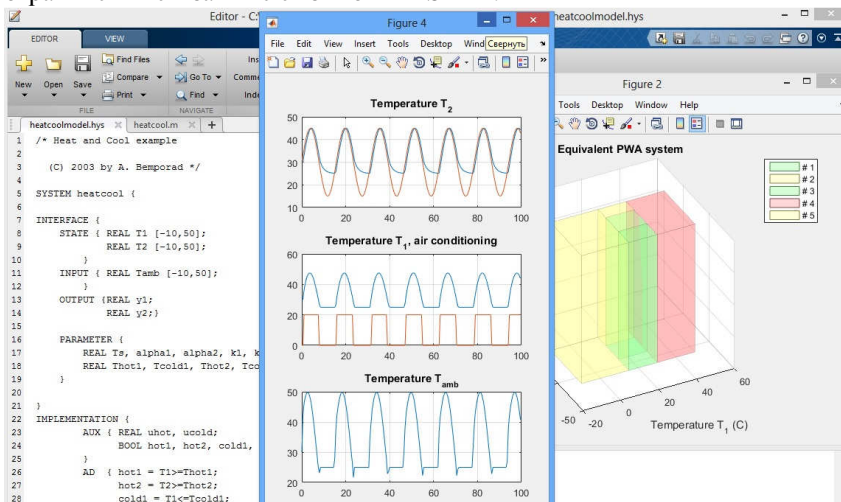


Рис. 5. Решение задачи с использованием Hybrid Toolbox

Еще одним популярным инструментом для проектирования и моделирования MPC-контроллеров для MATLAB/Simulink является YALMIP [11]. YALMIP поддерживает проектирование традиционных MPC-контроллеров, гибридных MPC-контроллеров на основе PWA формы модели, а также MPC-контроллеров для класса нестационарных систем (Linear parameter-varying – LPV). Как и Hybrid Toolbox YALMIP поддерживает широкий набор внешних решателей задач линейного, квадратичного и смешанного целочисленного программирования.

Применение пакета MATLAB для управления реальными технологическими процессами и техническими объектами сейчас не является чем-то особенным. MATLAB имеет все необходимые инструменты для управления реальными системами. На сайте компании MathWorks [12] имеются десятки примеров применения MATLAB для управления объектами в промышленности. Однако использование пакета MATLAB не всегда оправдано на практике из-за высокой стоимости самого пакета. Поэтому в настоящее время актуальной задачей является разработка инструментов, позволяющих создавать и применять MPC-контроллеры на базе свободно-доступных пакетов, таких как SCILAB или Octave, а также разработка подобных библиотек для универсальных языков программирования.

Сегодня одним из наиболее перспективных языков программирования в области математических расчетов, машинного обучения, искусственного интеллекта и многих других является высокоуровневый язык

Python. Для языка Python разработано множество библиотек для выполнения математических и инженерных расчетов и обработки данных. Наиболее известными из них являются NumPy – для работы с многомерными массивами, SymPy – библиотека для выполнения символьных вычислений в Python, Matplotlib – для построения графиков и визуализации данных и другие. Все вместе они предоставляют возможности, подобные MATLAB.

Библиотек Python, предназначенных для создания MPC контроллеров, в настоящее время, известно совсем не много. Одной из таких библиотек является свободно-доступная библиотека do-mpc [13]. do-mpc позволяет создавать как линейные, так и нелинейные MPC-контроллеры. MPC-контроллеры, реализованные с помощью библиотеки do-mpc являются модульными и включают четыре типа модулей: модуль модели (model), оптимизатор (optimizer), наблюдатель (observer) и симулятор (simulator). Модуль модели содержит описание дифференциальных и алгебраических уравнений модели объекта, включая все параметры модели, переменные состояния и входные переменные. Здесь же описываются начальные условия, критерий оптимальности и ограничения. Оптимизатор преобразует динамическую задачу оптимального прогнозирующего управления в задачу нелинейного программирования, а затем или решает ее самостоятельно или передает ее внешнему решателю. Наблюдатель реализует алгоритм, который на основе значений выходных переменных, полученных в результате измерений или моделирования, вычисляет значения переменных состояния объекта и передает их оптимизатору. Симулятор позволяет организовать процесс вычислений по модели и обмен информацией между модулями системы. Модульная структура позволяет легко перестраивать MPC-контроллеры для решения различных задач путем изменения отдельных модулей.

Вычислительной платформой для библиотеки do-mpc выступает свободно-доступная система алгоритмического дифференцирования и динамической оптимизации CasADi [14]. CasADi имеет front-end интерфейсы с языком Python, пакетами MATLAB и Octave и back-end интерфейсы с различными эффективными решателями задач нелинейного программирования большой размерности, такими как IPOPT, WORHP, SNOPT и KNITRO. Возможность использования внешних решателей позволяет библиотеке do-mpc эффективно реализовывать сложные нелинейные MPC-контроллеры.

Таким образом, в настоящее время существуют различные варианты практической реализации MPC-контроллеров. Наиболее просто задача проектирования MPC-контроллеров и их использования для моделирования или управления реальными объектами решается с помощью пакета MATLAB. MATLAB имеет богатый выбор инструментов для работы с MPC-контроллерами. Альтернативным вариантом является использование специализированных библиотек для универсальных языков программиро-

вания. Наиболее удобным и перспективным языком программирования для решения указанной задачи является язык Python. Этот язык, в настоящее время, имеет наилучшие возможности и наибольшее число инструментов для работы с МРС-контроллерами, по сравнению с другими языками программирования. Преимуществом второго варианта также является свободная доступность языка Python и его библиотек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang L. Model Predictive Control System Design and Implementation using MATLAB. Springer-Verlag London Limited. 2009. 396 p.
2. Morari M. and Lee J. Model predictive control: past, present and future // Computers and Chemical Engineering. 1999. Vol. 23. P. 667–682.
3. Scattolini R. Architectures for distributed and hierarchical Model Predictive Control. A review // Journal of Process Control. 2009. **19**. P. 723–731.
4. Model Predictive Control Toolbox User’s Guide. The MathWorks, Inc. 2018. 560 p.
5. Марьясин О.Ю. Управление тепловым режимом зданий с использованием прогнозирующих моделей / О.Ю. Марьясин, А.С. Колодкина // Вестник СамГТУ. 2017. № 1 (53). С. 122–132.
6. Марьясин О.Ю. Методы оптимального управления теплоснабжением зданий с использованием прогнозирующих моделей // Тр. XIX междунар. конф. ПУМСС-2017. Самара: ООО “Офорт”, 2017. С. 172–177.
7. HybridSystems, Control, Optimization [Электронный ресурс]. URL: <http://cse.lab.imtlucca.it/~bemporad/hybrid/toolbox> (дата обращения 24.04.2018).
8. Henzinger T.A. The Theory of Hybrid Automata, Proceedings of the Eleventh Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS). 1996. P. 278-292.
9. Sontag E.D. Nonlinear regulation: The piecewise linear approach // IEEE Trans. Automatic Control. 1981. 26(2). P. 346–358.
10. Bemporad A. Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints / A. Bemporad, M. Morari // Automatica. 1999. Vol. 35, no. 3. P. 407–427.
11. YALMIP [Электронный ресурс]. URL: <https://yalmip.github.io> (дата обращения 24.04.2018).
12. MathWorks - Makers of MATLAB and Simulink [Электронный ресурс]. URL: https://www.mathworks.com/?s_tid=gn_logo (дата обращения 24.04.2018).
13. Home · do-mpc/do-mpc Wiki · GitHub [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/do-mpc/do-mpc/wiki> (дата обращения 24.04.2018).
14. Home · casadi/casadiWiki · GitHub [Электронный ресурс]. URL: <https://github.com/casadi/casadi/wiki> (дата обращения 24.04.2018).

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

УДК 658.567.1

В. М. Макаров, С. З. Калаева, Н. Л. Маркелова

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: makarovvm@ystu.ru

МЕХАНО-ХИМИЧЕСКИ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ГАЛЬВАНОШЛАМЫ В АСФАЛЬТОБЕТОНЕ

В статье рассмотрена проблема существенного повышения адгезионной эффективности гальваношлама, обработанного в струйной мельнице, при его применении в асфальтобетонных смесях совместно с другими минеральными наполнителями. Особенно улучшаются такие определяющие показатели асфальтобетона, как прочность, сцепление битума с минеральной частью, длительная водостойкость.

Ключевые слова: гальваношлам, битум, адгезия, асфальтобетон.

V. M. Makarov, S. Z. Kalaeva, N. L. Markelova

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: makarovvm@ystu.ru

MECHANICALLY AND CHEMICALLY MODIFIED GALVANIC SLUDGES IN ASPHALT

The article deals with the problem of significant increase in the adhesive efficiency of galvanic sludge treated in a jet mill, when it is used in asphalt mixtures together with other mineral fillers. Especially improve such defining indicators of asphalt concrete as strength, adhesion of bitumen to the mineral part, long-term water resistance.

Keywords: galvanic sludge, bitumen, adhesion, asphalt.

Недостаточное сцепление нефтяных битумов с минеральными материалами является главной причиной снижения водостойкости, прочности и, следовательно, долговечности асфальтобетонных покрытий различного назначения, в том числе и дорожных.

Применение поверхностно-активных веществ для модификации поверхности минеральных наполнителей асфальтобетона не позволяют существенно улучшить вышеупомянутые показатели. Поэтому поиск других материалов, которые могут повысить адгезию битума к минеральным составляющим асфальтобетона является актуальным до настоящего времени.

Таким материалом может явиться подвергнутый обезжелезиванию и сушке осадок – гальваношлам, образующийся при очистке промывных сточных вод гальванических производств, представляющий собой крупнотоннажный отход [1, 2]. При этом важно, чтобы соединения железа доминировали в составе гальваношлама. Состав гальваношлама, образующегося при электрокоагуляционном способе очистки, представлен в табл. 1. Поскольку основу этого способа составляет растворение железного анода, видно значительное преобладание соединений железа.

Таблица 1. Состав гальваношлама электрокоагуляционной очистки промывных сточных вод гальваники

№ п/п	Показатели	Величина показателя
1	Влажность исходная, %	97,00 ± 1,00
2	Влажность после вакуум или пресс-фильтров, %	70,00 ± 2,00
3	Влажность после сушки, %	2,00 ± 0,50
4	Нефтепродукты, %	2,20 ± 0,30
5	pH водной фазы, единицы pH	7,90 ± 0,30
6	Водорастворимые соли, %	2,61 ± 1,40
7	Потери при прокаливании (600 °С), %	21,20 ± 2,10
8	Массовая доля веществ нерастворимых в HCl, %	6,90 ± 0,80
9	Fe(OH) ₃ , %	51,70 ± 5,60
10	Ni(OH) ₂ , %	0,25 ± 0,20
11	Cu(OH) ₂ , %	0,58 ± 0,33
12	Cr(OH) ₃ , %	6,78 ± 3,70
13	Zn(OH) ₂ , %	9,98 ± 2,60
14	Размер частиц, мкм	20...50
15	Цвет	коричневый

Из таблицы видно, что в высушенном гальваношламе существенно преобладают гидроксиды железа, поскольку основной механизм очистки воды электрокоагуляционным способом связан с растворением железного анода. Присутствие гидроксидов других тяжелых металлов совместно с гидроксидом железа могут оказывать каталитическое действие на процесс некоторой деструкции при температуре изготовления асфальтобетонной смеси около 200 °С битумной пленки, прилегающей к поверхности минерального материала, что обеспечивает облегчение затекания битума в его поры и повышению величины адгезии.

Поскольку в подавляющем большинстве типов гальваношлама гидроксид железа всегда преобладает, то при одновременном наличии компонентов каталитического комплекса (гидроксидов хрома, цинка и меди) вышеизложенный механизм адгезии может быть реализован.

Вторым механизмом улучшения адгезии является кислотно-основное взаимодействие между битумом и гальваношламом, с одной сто-

роны, и гальваношламом и минеральным материалом, с другой стороны. Поверхностные слои битума и минерального материала имеют кислый характер, а гальваношлама – основной характер [3]. И он является как бы промежуточным звеном, обеспечивая дополнительное адгезионное взаимодействие.

Третьим возможным механизмом улучшения адгезии при использовании гальваношламов является образование ферритов кальция и магния с поверхностью частиц доломитовой муки и щебня, применяемых при изготовлении асфальтобетона, в условиях процесса приготовления асфальтобетонной смеси при температурах выше 200 °С, имеющих также щелочной характер с последующей реализацией второго описанного механизма адгезии.

Наиболее предпочтительным способом смешения минерального компонента с гальваношламом является использование вращающихся барабанного типа сушильного и шнековых смесителей на асфальтобетонной установке «Тельтомак». Также для нанесения гальваношлама на минеральный материал можно использовать агрегат для приготовления и введения известкового молока.

В условиях лаборатории перемешивание проводилось в шаровой мельнице, внутренний объем которой на 50% был заполнен стальными шарами диаметром 20 мм. Для изготовления асфальтобетонной смеси использовался реактор с мешалкой и электрическим обогревом, позволяющий поддерживать температуру до 260 °С.

Испытания полученных асфальтобетонных образцов проводились в отделе по контролю за качеством работ государственного учреждения Ярославской области «Ярославская областная дорожная служба», а также в лабораториях соответствующих дорожно-ремонтно-строительных управлений (ДРСУ), где проводились производственные испытания.

Для проведения ряда экспериментов высушенный гальваношлам подвергался активации путем обработки в струйной мельнице 2С производительностью 5 кг/ч при расходе сжатого воздуха 300 м³/ч с давлением 0,7 МН/м², установленной мощностью 1,7 кВт, габаритами длина*ширина*высота соответственно 2*1*2,35 м и массой 0,47 т. После обработки частицы гальваношлама имели размер 1,5...3,5 мкм и обладали свойством магнитно-мягкого материала. То есть втягивались в поле постоянного магнита.

Состав асфальтобетонных смесей приведен в таблице 2.

В таблице 3 приведены результаты экспериментов, проведенных на кафедре «Охрана труда и природы» ЯГТУ, с использованием высушенного гальваношлама состава согласно таблице 1 без активации и с его активацией в струйной мельнице по сравнению с показателями асфальтобетона, не содержащего гальваношлама.

Таблица 2. Состав асфальтобетонных смесей

Состав асфальтобетонных смесей	Без модификатора	Высушенный гальваношлам	Гальваношлам, обработанный в струйной мельнице	
	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4*
1. Щебень гранитный, %	50,0	50,0	50,0	50,0
2. Песок мелкий, %	40,0	40,0	40,0	40,0
3. Минеральный порошок, %	10,0	10,0	10,0	10,0
4. Битум БНД 90/130 сверх минеральной части	6,5	6,5	6,5	6,5
5. Высушенный гальваношлам состава, приведенного в табл.1, на сумму минеральной части, %	2,0	2,0	2,0	2,0

* Обработанный в струйной мельнице гальваношлам введен в асфальтобетонную смесь через 15 суток.

Таблица 3. Показатели асфальтобетона типа 1,2,3,4

Показатели асфальтобетонов	Тип				
	1	2	3	4	
Плотность, кг/м ³	2360	2365	2370	2376	
Предел прочности на сжатие, МПа: при 20 °С при 50 °С	4,36 1,18	5,16 1,53	6,02 1,72	6,00 1,71	
	0,91	0,87	0,63	0,64	
Водонасыщение, %	0,91	0,87	0,63	0,64	
Сцепление битума с минеральной частью асфальтобетона (остаточная площадь, покрытая битумом после кипячения в 15% растворе NaCl), %	30	55	80	80	
Длительная водостойкость асфальтобетона ($k_{длит.} = R_n/R_{20}$, где n – предел прочности через определенное время водонасыщения):	15 суток	0,89	0,91	0,98	0,97
	30 суток	0,84	0,89	0,95	0,94
	45 суток	0,80	0,86	0,92	0,91
	60 суток	0,71	0,84	0,89	0,88
	90 суток	0,59	0,76	0,83	0,82

Из табл. 3 видно, что все показатели асфальтобетонов, содержащие высушенный гальваношлам выше, чем у образца сравнения (тип 1). Особенно это относится к асфальтобетону, содержащему гальваношлам, обработанный в струйной мельнице.

Также проведен эксперимент по применению гальваношлама, обработанного в струйной мельнице, но введенный в минеральную часть асфальтобетонной смеси не сразу, а спустя определенное количество дней. Результат испытаний, приведенный в таблице 3 под шифром Тип 4, показывает, что спустя 15 дней после обработки в струйной мельнице активационный эффект сохраняется, что является важным для построения рациональной технологии применения гальваношлама в асфальтобетоне.

Испытания, проведенные на кафедре «Охрана труда и природы» ЯГТУ, были продублированы отделом по контролю за качеством работ Ярославской областной дорожной службы, которая выдала ЯГТУ свое положительное заключение с рекомендацией о возможности применения гальваношлама в асфальтобетонных смесях.

На основании вышеизложенного ЯГТУ предложил ряду дорожных организаций Ярославской и Костромской областей провести подобные испытания на своих производственных базах.

В ДРСУ г. Гаврилов-Яма были проведены производственные испытания по получению асфальтобетона с использованием песка, обработанного гальваношламом (ГШ) Гаврилов-Ямского машиностроительного завода. Полученный асфальтобетон был уложен на автодороге Лахость-Гаврилов-Ям (4 км). Результаты испытаний асфальтобетона, как с обработкой, так и без обработки ГШ представлены в табл. 4.

Таблица 4. Свойства асфальтобетона, изготовленного ДРСУ г. Гаврилов-Ям

Способ изготовления	Предел прочности на сжатие, МПа		Средняя плотность, кг/м ³	Водонасыщение, % по объему	Набухание, % по объему	Коэффициент водостойкости, сутки		
	20°C	50°C				0	15	30
Без ГШ	2,80	1,30	2190	8,0	0,28	0,75	0,67	0,56
С ГШ	2,90	1,4	2230	7,3	0,20	0,78	0,72	0,65
Без ГШ	2,70	1,2	2180	10,0	0,80	0,71	0,64	0,52
С ГШ	2,90	1,2	2200	9,2	0,51	0,75	0,70	0,63
Без ГШ	3,0	1,3	2210	8,4	0,52	0,73	0,66	0,58
С ГШ	3,1	1,3	2220	7,1	0,22	0,79	0,72	0,67
Без ГШ	2,7	1,2	2200	9,5	0,12	0,74	0,68	0,57
С ГШ	3,8	2,2	2290	3,7	0	0,89	0,82	0,75

Результаты испытаний полученного асфальтобетона показали, что минеральный материал (песок), обработанный ГШ, имеет лучшие адгезионные свойства (сцепление с битумом), увеличивает плотность асфальтобетона, что, в конечном итоге приводит к более высоким показателям водостойкости асфальтобетона по сравнению с асфальтобетоном без обработки ГШ.

В ДРСУ поселка Некрасовское изготовлен асфальтобетон с использованием песка, обработанного ГШ Некрасовского механического завода, который уложен на участке автодороги Бурмакино-Рождествено. В связи с тем, что обработанный песок имеет более высокую степень сцепления с битумом по сравнению с асфальтобетоном без обработки ГШ, по коэффициенту длительной водостойкости за 30 суток имеет величину 0,65-0,75 против 0,50-0,55.

Асфальтобетон с использованием песка, обработанного ГШ, полученный ССМУ-5, г. Тутаев, уложен на участок автодороги Тутаев-Никольское, на строительных площадках совхоза «Молот» и строительство домов от фабрики «Тулъма». Результаты анализа отобранных проб асфальтобетона, приведенные в таблице 5, свидетельствуют о том, что асфальтобетоны на основе минерального материала, обработанного ГШ, имеют, практически, одинаковые физико-механические показатели, но лучшее сцепление с битумом, что выражается в более высоких показателях водостойкости, длительной водостойкости в сравнении с асфальтобетоном, полученным без обработки ГШ.

Таблица 5. Свойства асфальтобетона, изготовленного ССМУ-5, г. Тутаев

Способ изготовления	Предел прочности на сжатие, МПа		Средняя плотность, кг/м ³	Водонасыщение, % по объему	Набухание, % по объему	Коэффициент водостойкости, сутки		
	20°С	50°С				0	15	30
Без ГШ	1,80	0,40	2110	13,5	1,92	0,69	0,53	0,44
С ГШ	1,85	0,45	2120	12,8	1,74	0,97	0,65	0,60
Без ГШ	1,95	0,45	2080	13,1	0,82	0,65	0,52	0,40
С ГШ	2,00	0,45	2090	12,6	0,76	0,97	0,69	0,52
Без ГШ	1,30	0,40	1980	16,1	1,60	0,60	0,65	0,38
С ГШ	1,60	0,45	2010	15,7	1,53	0,78	0,71	0,66
Без ГШ	1,30	0,45	1990	16,2	1,80	0,58	0,50	0,38
С ГШ	1,50	0,55	2020	15,2	1,70	0,75	0,69	0,57

ПРСО «Костромаавтодор» проводил лабораторные исследования по введению ГШ в асфальтобетонные смеси в соответствии с рекомендациями, представленными кафедрой «Охрана труда и природы» ЯГТУ. Использован гальваношлам после очистки промывных сточных вод гальваники завода «Рабочий металлист». Расход активатора составил 1,0% (на сухое вещество минеральных компонентов). Обработке подвергались смесь песка и гранитного щебня, песка и песчано-гравийной смеси. Были приготовлены следующие виды асфальтобетонных смесей (по ГОСТ 12801-84):

I Тип «Б»	II Тип «В»
Щебень гранитный – 50 %	ПГС «Камская» – 50 %
Песок мелкий – 40 %	Песок мелкий – 35 %
Минеральный порошок – 10 %	Минеральный порошок – 15 %
Битум БНД 90/130 – 6,5 %	Битум БНД 90/130 – 7,5 %
(сверх минеральной части)	(сверх минеральной части)

Результаты испытаний образцов асфальтобетонов приведены в табл. 6.

Таблица 6. Свойства асфальтобетонов, изготовленных ПРСО «Костромаавтодор»

Наименование показателя	Показатели асфальтобетона				
	без обработки		с обработкой		
	I	II	I	II	
Плотность, кг/м ³	2370	2350	2390	2370	
Предел прочности на сжатие, МПа: при 20 °С при 50 °С	4,490	2,450	5,035	3,250	
	1,290	0,760	1,450	0,890	
Водонасыщение, %	0,89	4,72	0,67	2,42	
Набухание, %	0,29	0,43	0,01	0,12	
Сцепление битума с минеральной частью асфальтобетона (% поверхности на сколе, покрытый битумом. После кипячения в 15% растворе NaCl)	30	28	65	63	
Длительная водостойкость асфальтобетона ($k_{длит.} = R_n/R_{20}$, где n – предел прочности через определенное время водонасыщения):	15 суток	0,92	0,85	0,97	0,97
	30 суток	0,85	0,74	0,93	0,91
	45 суток	0,80	0,60	0,85	0,85
	60 суток	0,72	0,50	0,80	0,80
	90 суток	0,60	0,45	0,76	0,70

Процесс использования гальваношлама (ГШ) в асфальтобетоне сопровождается хемосорбцией в соответствии с изложенными выше тремя механизмами.

Для подтверждения отсутствия уноса ГШ в атмосферу и загрязнения почвы территорий, прилегающих к асфальтобетонным заводам (АБЗ), были отобраны пробы почвы с учетом розы ветров у Гаврилов-Ямского АБЗ, Некрасовского АБЗ и на обочинах дорог Бурмакино-Рождествено и Гаврилов-Ям-Ляхость в тех местах, где уложен асфальтобетон с минераль-

ной частью, обработанной ГШ. Пробы почвы отбирались с обочины дороги на расстоянии 2-3 метра от края асфальтобетонного покрытия. Каждая проба отбиралась в пяти точках квадрата 1 на 1 м в углах и центре квадрата с последующим смешением. Глубина отбора проб – 10 см. Анализ проб на содержание тяжелых металлов показал их отсутствие. Таким образом, обработка минеральной части асфальтобетонных смесей не оказывает негативного воздействия на почвы как на территории АБЗ, так и на придорожные участки.

Рекомендации по итогам проведенных исследований были направлены руководству департамента дорожного хозяйства Ярославской области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Макаров В.М.* Токсичные тяжелые металлы и их утилизация / В.М. Макаров, С.З. Калаева, Н.Л. Маркелова. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. 115 с.
2. А. с. 1747417 Российская Федерация. Способ обработки минеральных материалов для дорожных покрытий / А.Н. Аминов, М.Я. Гринберг, В.С. Колобков, В.М. Макаров, Т.Л. Денисова, И.В. Савицкая и С.В. Барабаш. Оpubл. 15.07.92, Бюл. №26.
3. *Калаева С.З.* Определение характера функциональных групп на поверхности магнетита / С.З. Калаева, В.М. Макаров, А.Г. Бажанова // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2009. Т. 52, вып. 10. С. 151-152.

УДК 57.021

М. С. Сорокина, М. Е. Соловьев

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, *e-mail: sorokinamashulyasergeevna@mail.ru,*
soloviev56@gmail.com

КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПЛЕКСООБРАЗОВАНИЯ ГИДРОПЕРОКСИЛЬНОГО И ГИДРОКСИЛЬНОГО РАДИКАЛОВ С ГИДРОКСИД-ИОНОМ И ИОНОМ ГИДРОКСОНИЯ

Исследованы структуры и энергии образования комплексов гидропероксильного (НОО•) и гидроксильного (НО•) радикала с гидроксид-ионом и ионом гидроксония, присутствующими в водной фазе при окислении углеводов в мицеллах. Установлена одна из причин снижения скорости окисления моделей липидов в мицеллах по сравнению с окислением в гомогенной углеводородной фазе.

Ключевые слова: *липиды, мицеллы, комплексообразование, гидропероксильный радикал, гидроксильный радикал, гидроксид-ион, ион гидроксония.*

M. S. Sorokina, M. E. Soloviev

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: sorokinamashulyasergeevna@mail.ru,
soloviev56@gmail.com

QUANTUM-CHEMICAL INVESTIGATION OF THE COMPLEX FORMATION OF HYDROPEROXYL AND HYDROXYL RADICALS WITH HYDROXIDE ION AND ION HYDROXONIUM

We investigate the structure and energy of the formation of hydroperoxyl ($\text{HOO}\bullet$) and hydroxyl ($\text{HO}\bullet$) radicals with hydroxide ion and hydroxonium ion present in the aqueous phase during the oxidation of hydrocarbons in micelles. One of the reasons for the decrease in the rate of oxidation of lipid models in micelles is established in comparison with oxidation in a homogeneous hydrocarbon phase.

Keywords: lipids, micelles, complexation, hydroperoxyl radical, hydroxyl radical, hydroxide ion, hydroxonium ion.

Комплексообразование гидропероксидов в растворах играет важную роль в кинетике окисления органических соединений [1]. Вместе с тем основная часть экспериментальных исследований в этой области посвящена изучению комплексов с молекулами, содержащими четное число электронов – различными субстратами и продуктами реакции окисления, тогда как комплексы радикалов с ионами практически не изучены. Экспериментальный их анализ затруднен ввиду малой концентрации и малого времени жизни радикальных интермедиатов, хотя важность их изучения несомненна, особенно в биологических системах, где окисление протекает в гетерогенной системе, включающей водную и углеводородную фазы [2–4].

Целью настоящей работы явилось исследование структуры и энергии образования комплексов гидропероксильного ($\text{HOO}\bullet$) и гидроксильного ($\text{HO}\bullet$) радикала с гидроксид-ионом и ионом гидроксония, присутствующими в водной фазе при окислении углеводов в мицеллах. Данные радикалы могут образовываться на разных стадиях в кинетическом цикле окисления [5] и принимать участие в иницировании реакции путем отрыва водорода или присоединения к двойной связи ненасыщенных углеводородных фрагментов.

Расчет полных электронных энергий и термодинамических функций участвующих в реакциях соединений производили квантово-химическим методом функционала плотности с гибридным обменно-корреляционным функционалом Becke, Lee, Yang&Parr DFT B3LYP/6-311G** с открытыми оболочками с использованием программного комплекса NWChem. Как

показано авторами [6] на примере комплекса из двух молекул воды, использование функционала V3LYP с данным базисом является приемлемым компромиссом с точки зрения точности описания водородной связи и используемых компьютерных ресурсов вследствие частичной взаимной компенсации ошибок, вызванных, с одной стороны, недостаточностью количества базисных функций, а, с другой стороны, выбранным типом функционала. Расчет энергий сольватации комплексов и их компонентов производили в рамках континуальной модели COSMO, предложенной авторами [7] и усовершенствованной в работе [8]. В недавней статье [9] один из авторов модели COSMO, Klamt с сотр. на примере большой выборки нейтральных и ионизированных растворов сопоставили модель COSMO с более современной континуальной моделью среды IEF-PCM и пришли к заключению, что при правильном выборе параметризации разница между результатами вычислений в рамках обоих подходов не существенная. В настоящей работе при вычислениях значений диэлектрической постоянной среды было приняты следующие значения: водная фаза – 78.355, углеводородная фаза (метиллинолеат) – 3.245. Данный выбор обусловлен широким распространением водных эмульсий метиллинолеата в качестве моделей при изучении окисления липидов [10–12]. Вместе с тем, как показано в работах [13, 14], изменения термодинамических функций реакций окисления мало зависят от длины углеводородного радикала, так что в качестве моделей липидов могут быть использованы углеводороды и с меньшим числом атомов.

Энергии образования комплексов радикалов с ионами вычисляли как разности полных энергий DFT в углеводородной (oil) и водной (w) фазах комплекса и их суммы для компонентов, составляющих комплекс:

$$\Delta E^{oil} = E_{compl}^{oil} - \sum_i E_i^{oil}, \quad (1)$$

$$\Delta E^w = E_{compl}^w - \sum_i E_i^w. \quad (2)$$

Для характеристики распределения комплексов (A) между фазами вычисляли разности свободных энергий сольватации комплексов в водной и углеводородной фазах:

$$\Delta \Delta G_{sol}^{oil \rightarrow w}(A) = \Delta G_{sol}^w(A) - \Delta G_{sol}^{oil}(A). \quad (3)$$

На основании этих величин можно вычислить коэффициенты распределения [15]

$$\log P(P^{oil/w})(A) = \frac{\Delta \Delta G_{sol}^{oil \rightarrow w}(A)}{2.303RT}. \quad (4)$$

В табл. 1 приведены вычисленные значения свободных энергий сольватации радикалов НОО• и НО• в углеводородной и водной фазах,

разности свободных энергий сольватации (3) и логарифмы коэффициентов разделения (4). Как видно, абсолютные величины свободных энергий сольватации радикалов относительно невелики. Разности свободных энергий сольватации по порядку величины близки к значениям, рассчитанным в работе [16]. Значения коэффициентов распределения свидетельствуют, что радикалы при возможности свободной диффузии будут преимущественно диффундировать в водную фазу.

Таблица 1. Свободные энергии сольватации радикалов $\text{HO}\cdot$ и $\text{HO}\cdot$ (кДж/моль)

Радикал	ΔG_{sol}^{oil}	ΔG_{sol}^w	$\Delta\Delta G_{sol}^{oil \rightarrow w}$	$\log P(P^{oil/w})$
$\text{HO}\cdot$	-17,33	-26,05	-8,7220	-0,0015
$\text{HO}\cdot$	-13,60	-20,25	-6,6522	-0,0012

В табл. 2 представлены вычисленные значения энергий образования комплексов радикалов с гидроксид-ионами и ионами гидроксония, а также энергии их сольватации и разницы энергий сольватации (3). Можно видеть, что абсолютные величины энергий образования комплексов весьма велики. Для комплексов с ионом гидроксония они лежат в пределах значений, отвечающих сильным межмолекулярным взаимодействиям, тогда как для комплексов с гидроксид-ионом значения энергий образования соответствуют энергиям химических реакций. Для всех комплексов абсолютные величины энергий образования в водной фазе меньше, чем в углеводородной, что связано с большей величиной энергии сольватации в водной фазе. Также можно отметить, что по абсолютной величине энергии образования комплексов радикала $\text{OH}\cdot$ с ионом OH^- больше, чем с ионом H_3O^+ , а в случае радикала $\text{OON}\cdot$, наоборот, меньше.

Таблица 2. Энергии образования и свободные энергии сольватации комплексов радикалов $\text{HO}\cdot$ и $\text{HO}\cdot$ с ионами H_3O^+ и OH^- (кДж/моль)

Комплекс	Энергия образования		Свободная энергия сольватации		
	ΔE^{oil}	ΔE^w	ΔG_{sol}^{oil}	ΔG_{sol}^w	$\Delta\Delta G_{sol}^{oil \rightarrow w}$
$\cdot\text{OON}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$	-56,60	-10,27	-246,86	-454,56	-207,70
$\cdot\text{OH}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$	-64,36	-47,44	-236,67	-351,00	-114,32
$\cdot\text{OON}\cdot\text{OH}^-$	-255,62	-212,18	-204,08	-295,62	-91,54
$\cdot\text{OH}\cdot\text{OH}^-$	-146,68	-118,11	-230,54	-337,39	-106,86

Для объяснения данных закономерностей проанализируем структуру комплексов и распределение частичных зарядов на атомах. На рис. 1 представлены структуры комплексов в углеводородной среде, а в табл. 3 и 4 приведены частичные заряды по Малликену на атомах комплексов и расстояния между некоторыми атомами, участвующими во

взаимодействиях. Аналогичные данные для комплексов в водной среде приведены на рис. 2 и в табл. 5 и 6 соответственно.

Как можно заключить из анализа этих данных комплексы с ионом гидроксония формируются за счет водородных связей между протоном иона гидроксония и атомом кислорода в радикалах. В случае гидроксильного радикала перераспределение электронной плотности в комплексе происходит в большей степени по сравнению с комплексом с участием гидропероксильного радикала. Следствием этого является большая величина энергии образования комплекса $\bullet\text{OH}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$ по сравнению с $\bullet\text{OON}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$, что видно из данных табл. 2. Структура комплексов $\bullet\text{OH}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$ и $\bullet\text{OON}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$ в водной среде незначительно отличается от их структуры в углеводородной фазе. В основном это касается комплекса $\bullet\text{OON}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$, в котором водородная связь образуется не между атомами H1 и O2, как в углеводородной среде, а между атомами H3 и O1. Энергия такой связи оказывается существенно меньшей по сравнению с ее значением для комплекса в углеводородной фазе. Следует отметить, что энергии образования всех комплексов в водной среде меньше, чем в углеводородной, что объясняется большим значением диэлектрической постоянной воды. Это, как известно, приводит к уменьшению вкладов кулоновских взаимодействий.

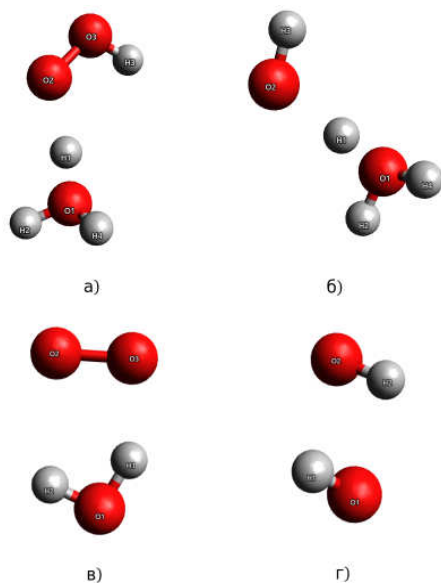


Рис. 1. Структура комплексов в углеводородной фазе:
a – $\bullet\text{OON}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$; *б* – $\bullet\text{OH}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$; *в* – $\bullet\text{OON}\cdot\text{HO}^+$; *г* – $\bullet\text{OH}\cdot\text{HO}^+$

Таблица 3. Распределение частичных зарядов на атомах в углеводородной фазе

а)		б)		в)		г)	
Номер атома	Частичный заряд	Номер атома	Частичный заряд	Номер атома	Частичный заряд	Номер атома	Частичный заряд
O1	-0,29	O1	-0,70	O1	-0,61	O1	-0,71
H1	0,39	H1	0,49	H1	0,25	H1	0,20
H2	0,38	H2	0,55	O2	-0,43	O2	-0,70
O2	-0,17	O2	-0,40	O3	-0,43	H2	0,21
O3	-0,05	H3	0,51	H2	0,22		
H3	0,34	H4	0,55				
H4	0,38						

Таблица 4. Некоторые расстояния (R) между атомами в комплексах в углеводородной фазе

а)		б)		в)		г)	
Атомы	R	Атомы	R	Атомы	R	Атомы	R
O1-H4	0,975	O1-H2	0,975	O1-H1	0,989	O1-H1	0,963
O1-H1	1,042	O1-H1	1,043	O3-H1	1,774	O1-H2	1,958
O2-H1	1,517	O2-H1	1,502			O2-H1	2,188

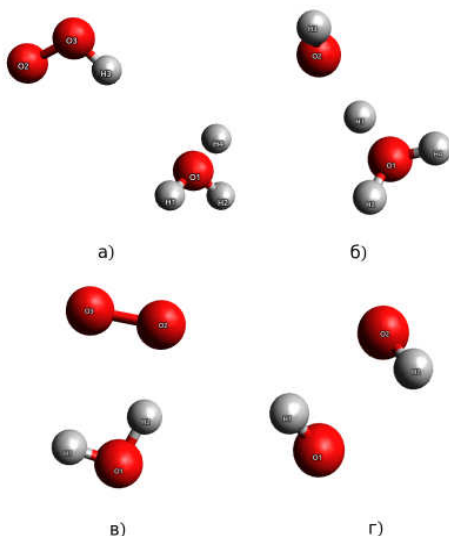


Рис. 2. Структура комплексов в водной фазе:

а – $\cdot\text{O}^-\text{O}^-\text{H}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$; б – $\cdot\text{O}^-\text{H}\cdot\text{H}_3\text{O}^+$; в – $\cdot\text{O}^-\text{O}^-\text{H}\cdot\text{H}\cdot\text{O}$; г – $\cdot\text{O}^-\text{H}\cdot\text{H}\cdot\text{O}$

Таблица 5. Распределение частичных зарядов на атомах в водной фазе

а)		б)		в)		г)	
Номер атома	Частичный заряд	Номер атома	Частичный заряд	Номер атома	Частичный заряд	Номер атома	Частичный заряд
O1	-0,21	O1	-0,69	O1	-0,63	O1	-0,72
H1	0,40	H1	0,48	H1	0,24	H1	0,22
H2	0,41	H2	0,55	O2	-0,44	O2	-0,71
O2	-0,19	O2	-0,39	O3	-0,44	H2	0,22
O3	-0,15	H3	0,51	H2	0,26		
H3	0,34	H4	0,55				
H4	0,40						

Таблица 6. Некоторые расстояния (R) между атомами в комплексах в водной фазе

а)		б)		в)		г)	
Атомы	R	Атомы	R	Атомы	R	Атомы	R
O1-H1	0,978	O1-H2	0,974	O1-H2	0,991	O1-H1	0,963
O1-H4	0,978	O1-H1	1,038	O2-H2	1,724	O1-H2	2,161
O1-H3	2,967	O2-H1	1,517			O2-H1	2,151

Комплексы с гидрид-ионом $\bullet\text{OON}\cdot\text{HO}^-$ и $\bullet\text{OH}\cdot\text{HO}^-$ для обеих сред имеют существенно большее значение энергий образования по сравнению с комплексами с ионом гидроксония. По порядку величин эти значения характерны для энергий химических связей или близки к ним. Действительно, анализ молекулярных структур показывает, что они существенно изменяются. Так в комплексе $\bullet\text{OON}\cdot\text{HO}^-$ атом водорода переходит от радикала к гидрид-иону, а электронная плотность, наоборот, смещается на атомы кислорода радикала. В результате этого процесса фактически образуется супероксидный ион из атомов O2-O3 и вода из атомов H1-O1-H2. В случае комплекса $\bullet\text{OH}\cdot\text{HO}^-$ подобного не происходит, а образуется анион-радикальная пара, что сопровождается существенно меньшим значением энергии образования. В водной фазе структура ион-радикальной пары аналогична структуре в углеводородной, но энергия образования комплекса ниже по уже описанной выше причине.

Сравнивая энергии сольватации комплексов с энергиями сольватации свободных радикалов (см. табл. 1 и 2) можно отметить, что энергии сольватации комплексов существенно превышают энергии сольватации радикалов, что характерно во всех случаях при сравнении энергий сольватации ионов и нейтральных молекул. При этом разности свободных энергий сольватации комплексов в водной и углеводородной фазах также существенно выше их значений для радикалов. Столь высокие

значения $\Delta\Delta G_{sol}^{oil \rightarrow w}$ комплексов позволяют заключить, что их распределение в равновесии будет полностью смещено в водную фазу. Этот результат позволяет объяснить одну из причин снижения констант скорости окисления метиллинолеата в мицеллах по сравнению с их значениями в растворах. В данном случае причина состоит в том, что активные радикальные частицы, являющиеся инициаторами и носителями цепей окисления при комплексообразовании, начинают с большей вероятностью диффундировать в водную фазу. При этом их концентрация в углеводородной фазе, где сосредоточен окисляющийся субстрат снижается, что и приводит к снижению скорости окисления.

Таким образом, в настоящей работе исследованы процессы комплексообразования активных радикальных частиц, возникающих в процессе окисления липидов и установлена одна из причин снижения скорости окисления моделей липидов в мицеллах по сравнению с окислением в гомогенной углеводородной фазе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Плусс Е.М.* Комплексообразование гидропероксидов в растворах / Е.М. Плусс, О.П. Яблонский, А.И. Русаков, А.В. Сирик. М.: Мир, 2008. 220 с.
2. *Porter N.A.* Perspective on Free Radical Autoxidation: The Physical Organic Chemistry of Polyunsaturated Fatty Acid and Sterol Peroxidation // *J. Org. Chem.* 2013. Vol. 78. P. 3511-3524.
3. *Pratt D. A.* Free Radical Oxidation of Polyunsaturated Lipids: New Mechanistic Insights and the Development of Peroxyl Radical Clocks / D.A. Pratt, K.A. Tallman, N. A. Porter // *Acc. Chem. Res.* 2011. Vol. 44. P. 458-467.
4. *Yin H.* Free Radical Lipid Proxidation: Mechanisms and Analysis / H. Yin, L. Xu, N.A. Porter // *Chem. Rev.* 2011. Vol. 111. P. 5944-5972.
5. *Denisov E. T.* Oxidation and Antioxidants in Organic Chemistry and Biology / E.T. Denisov, I.B. Afanas'ev // Boca Raton (FL): CRC Press. 2005. 992 p.
6. *Plumley J.A.* Comparison of the Behavior of Functional/Basis Set Combinations for Hydrogen-Bonding in the Water Dimer with Emphasis on Basis Set Superposition Error / J.A. Plumley, J.J. Dannenberg // *J. Comput. Chem.* 2011. Vol. 32(8). P. 1519-1527.
7. *Klamt A.* COSMO: A New Approach to Dielectric Screening in Solvents with Explicit Expressions for the Screening Energy and its Gradient / A. Klamt, G. Schuurmann // *J. Chem. Soc. Perkin Trans.* 1993. Vol. 2. P. 799-805.
8. *York D.M.* Smooth Solvation Potential Based on the Conductor-Like Screening Model / D.M. York, M. A. Karplus // *J. Phys. Chem.* 1999. Vol. 103. P. 11060-11079.
9. *Klamt A.* Comprehensive Comparison of the IEFPCM and SS(V)PE Continuum Solvation Methods with the COSMO Approach / A. Klamt, C. Moya, J. A. Palomar // *J. Chem. Theory Comput.* 2015. Vol. 11. P. 4220-4225.
10. *Roginsky V.* Superoxide dismutase inhibits lipid peroxidation in micelles / V. Roginsky, T. Barsukova // *Chemistry and Physics of Lipids.* 2001. Vol. 111. P. 87- 91.
11. *Перевозкина М.Г.* Тестирование антиоксидантной активности полифункциональных соединений кинетическими методами. Новосибирск: СибАК, 2014. 240 с.

12. Стабильные нитрокислые радикалы и гидроксилмины как ингибиторы окисления метиллинолеата в мицеллах / И.В. Тихонов, Е.М. Плисс, Л.И. Бородин, В.Д. Сень, Т.С. Кузнецова // Изв. АН. Серия химическая. 2015. Вып. 10. С. 2438-2443.
13. *Смирнова, С.Ю.* Квантово-химическое исследование реакции отрыва водорода в углеводородных радикалах полиненасыщенных кислот / С.Ю. Смирнова, М.Е. Соловьев // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2012. Т. 55, вып. 11. С. 78-81.
14. *Новикова А.А.* Квантово-химическое исследование реакций окисления в ненасыщенных углеводородах / А.А. Новикова, М.Е. Соловьев // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2017. Т. 60, вып. 7. С. 14-20.
15. *Jorgensen W.L.* Relative Partition Coefficients for Organic Solutes from Fluid Simulations / W. L. Jorgensen, J. M. Briggs, M. L. Contreras // J. Phys. Chem. 1990. Vol. 94. P. 1683-1686.
16. Lipid Peroxidation in Membranes: The Peroxyl Radical Does Not “Float” / J. Garrec, A. Monari, X. Assfeld, L.M. Mir, M. Tarek // The Journal of Physical Chemistry Letters. 2014. Vol. 5. P. 1653-1658.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ И НАУКИ О ЗЕМЛЕ

УДК [636.234.1:636.03] (470.314/.317)

А. С. Ермишин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: ermishinas@ystu.ru

АДАПТАЦИОННЫЕ И ПРОДУКТИВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИМПОРТНОГО ГОЛШТИНСКОГО СКОТА В УСЛОВИЯХ ВЕРХНЕГО ПОВОЛЖЬЯ РОССИИ

Представлены результаты исследований продуктивных и адаптационных особенностей импортного скота голштинской породы в двух поколениях в условиях Верхнего Поволжья России.

Ключевые слова: молочная продуктивность, голштинский скот, матери и дочери, коэффициент адаптации, Верхнее Поволжье России.

A. S. Ermishin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: ermishinas@ystu.ru

ADAPTIVE AND PRODUCTIVE FEATURES IMPORTED HOLSTEIN CATTLE IN CONDITIONS OF THE UPPER VOLGA REGION OF RUSSIA

We present results of studies of productive and adaptive characteristics of imported Holstein cattle breed in two generations in conditions of the Upper Volga region of Russia.

Keywords: milk yield, Holstein cattle, mothers and daughters, coefficient of adaptation, the Upper Volga region of Russia.

Очевидно, что создание молочных комплексов за счёт дорогостоящего скота (и в ряде случаев – не лучшего качества) проводить весьма сложно, считает И. Заднепрянский, доктор сельскохозяйственных наук, профессор кафедры генетики и разведения животных ФГБОУ ВО «Белгородская ГСХА». Тут возникает проблема акклиматизации животных (в основном – импортное нетелей), химического состава кормов, соответствующего уровня технологий...

Наша задача – создать лучшие условия разведения, чем были прежде. Только по причине погрешности в кормлении в импортируемом маточном поголовье наблюдаются различные биологические отклонения, приводящие в ряде случаев к различным заболеваниям и гибели скота. Нарушается и воспроизводительная способность коров. В частности, наблюдается увеличение числа мертворождённых телят. Это мы, как говорится, уже прошли, завозя импортный скот из других стран, в том числе из Европы и США [1].

По мнению В.В. Мадисон и Л.В. Мадисон, кандидатов биологических наук Головного селекционного центра Украины (г. Переяслав-Хмельницкий) Национального аграрного университета (НАУ, г. Киев), надо отдать должное карантинным службам России – массовый завоз скота обходится (пока) без острых инфекционных сюрпризов. Другое дело – малоизученные, «дремлющие» инфекции, которые современные ветеринарные исследования выявить у взрослых животных перед продажей не в состоянии, а карантинные службы – не принимают во внимание. Такие как скрытые формы некробактериоза, хламидиоза, лейкоза. Совсем недавно фермы импортёров скота из Западной Европы и США стал посещать неизлечимый папилломатозный пальцевый дерматит, часто именуемый «коровьим сифилисом» [2].

Поэтому вопрос акклиматизации всегда актуален. Так устроена природа. Поэтому нельзя не согласиться с мнением академика П.Н. Прохоренко, который считает абсолютно нецелесообразным импорт маточного поголовья для формирования молочных стад. Ведь генетическое значение животных в основном проверяется племенной ценностью быка-производителя. Примером может служить Ленинградская область, хозяйствами которой импорт маточного поголовья зарубежной селекции не практиковался. Но по показателям молочной продуктивности коров регион занимает лидирующее место в Российской Федерации [1].

Закупка импортного скота, даже элитного и с великолепным генетическим потенциалом, всегда есть весьма рискованное предприятие. Для того чтобы импортный скот полностью проявил свою генетически запрограммированную высокую продуктивность, необходимо максимально приблизить условия содержания, кормления, доения, поения и ухода к таковым, которые для данных животных являются оптимальными (закономерная связь генотипа и среды). Для Верхнего Поволжья Российской Федерации, как и в целом для всей нашей страны, эта проблема остаётся актуальной, так как закупки племенного скота за границей ещё планируется совершать из-за нехватки собственных генетических ресурсов, в том числе высокопродуктивных животных для заполнения огромных молочных комплексов, строительство которых сейчас активно ведётся.

В числе хозяйств Ярославской области, в которые завозили импортное маточное поголовье, а именно нетелей 6–7-месячной стельности, было

и ООО «Новое Щедрино». В 2002 году в это хозяйство были завезены 190 голов чистопородных чёрно-пёстрых голштинских нетелей селекции Нидерландов. В ООО «Новое Щедрино» применяют круглогодичное беспривязное содержание в комбикоксах с получением молока в доильном зале.

Адаптационная способность – это способность животных выживать и сохранять нормальные продуктивные качества, способность реализовать свой наследственный потенциал продуктивности.

Для хозяйственного использования, прежде всего, важны продуктивные качества животных, по которым рассчитали коэффициент адаптации по формуле, предложенной профессором Б.П. Моховым:

$$A = W + \frac{(M_i - M)}{\sigma}, \quad (1)$$

где A – коэффициент адаптации; W – возраст коровы в отёлах; M_i – величина признака по группе коров; M – стандарт породы; σ – стандартное отклонение.

Коэффициент адаптации представляет собой нормированное отклонение от стандартных показателей породы по молочной продуктивности и развитию (живой массе). Оно позволяет оценить состояние распределения признака в изучаемой популяции, определить количество особей с желаемыми свойствами и их качественные показатели [3].

Стандартные показатели породы по молочной продуктивности и живой массе по 1-й лактации, т.е. требования 1 бонитировочного класса к породе взяты из инструкции по бонитировке крупного рогатого скота молочных и молочно-мясных пород [4].

В нашей работе научной новизной является расчёт коэффициентов адаптации в разрезе генеалогических линий. В стаде ООО «Новое Щедрино» разводят чистопородный голштинский скот трёх основных линий: Монтвик Чифтейн, Рефлекшн Соверинг и Уес Идеал. В анализируемой нами репрезентативной выборке присутствуют коровы всех трёх линий как среди матерей, так и среди дочерей.

Исходя из данных табл. 1, можно сказать, что по молочной продуктивности коров, в целом, лучшими среди матерей являются линии Уес Идеал и Рефлекшн Соверинг. Худшей оказалась линия; линия Монтвик-Чифтейн, однако в данном случае являлась обильномолочной: удой составил 6246 кг. Среди дочерей лучшей для стада является линия Уес Идеал: удой – 6046 кг, массовая доля жира и белка в молоке – соответственно 3,57 и 3,54%, а худшей – линия Рефлекшн Соверинг.

Такому небольшому перераспределению лидерских позиций во многом способствовали племенная работа со стадом и повышенный уровень кормления дочерей в сравнении с матерями (на 1 кормовую единицу приходилось 103,90 г переваримого протеина в рационах матерей, у дочерей – 131,30 г).

Таблица 1. Адаптация и продуктивные качества коров-первотёлоч голштинской породы в разрезе линий

Показатели		$M \pm m$	σ	Стандарт породы	Коэффициент адаптации
Линия Уес Идеал, $n_{\text{мат.}} = 10, n_{\text{доч.}} = 11$					
Удой за 305 дней лактации, кг	матери	5992,30±264,90	794,70	2650	5,206
	дочери	6046,09±209,72	663,18		6,121
Массовая доля жира в молоке, %	матери	3,73±0,09	0,27	3,6	1,481
	дочери	3,57±0,11	0,36		0,917
Массовая доля белка в молоке, %	матери	3,23±0,03	0,08	3,3	0,125
	дочери	3,54±0,08	0,25		1,960
Живая масса при первом отёле, кг	матери	525,50±9,86	29,58	420	4,567
	дочери	524,45±14,79	46,78		3,233
Линия Рефлекшн Соверинг, $n_{\text{мат.}} = 7, n_{\text{доч.}} = 9$					
Удой за 305 дней лактации, кг	матери	5987,86±290,50	711,57	2650	5,691
	дочери	5973,89±202,29	572,15		6,809
Массовая доля жира в молоке, %	матери	3,95±0,10	0,25	3,6	2,400
	дочери	3,41±0,22	0,64		0,703
Массовая доля белка в молоке, %	матери	3,24±0,04	0,09	3,3	0,333
	дочери	3,41±0,09	0,26		1,423
Живая масса при первом отёле, кг	матери	483,14±15,43	37,79	420	2,671
	дочери	508,00±18,35	51,91		2,695
Линия Монтвик Чифтейн, $n_{\text{мат.}} = 13, n_{\text{доч.}} = 10$					
Удой за 305 дней лактации, кг	матери	6245,85±228,84	792,73	2650	5,536
	дочери	5896,18±231,48	732,02		5,435
Массовая доля жира в молоке, %	матери	3,55±0,10	0,36	3,6	0,861
	дочери	3,56±0,06	0,19		0,789
Массовая доля белка в молоке, %	матери	3,18±0,02	0,08	3,3	-0,500
	дочери	3,50±0,04	0,12		2,667
Живая масса при первом отёле, кг	матери	511,54±5,38	18,64	420	5,911
	дочери	516,64±8,78	27,75		4,482
В среднем по всей выборке, $n_{\text{мат.}} = 30, n_{\text{доч.}} = 30$					
Удой за 305 дней лактации, кг	матери	6088,50±133,88	745,70	2650	5,611
	дочери	5976,90±133,81	633,83		6,249
Массовая доля жира в молоке, %	матери	3,70±0,06	0,34	3,6	1,294
	дочери	3,52±0,08	0,42		0,809
Массовая доля белка в молоке, %	матери	3,21±0,01	0,08	3,3	-0,125
	дочери	3,48±0,04	0,20		1,960
Живая масса при первом отёле, кг	матери	517,55±4,44	24,75	420	4,941
	дочери	521,76±7,83	43,62		3,333

Перераспределение лидерских позиций по продуктивным качествам, по нашему мнению, обусловлено средовыми факторами. Во многом способствовали этому выращивание молодняка и раздой первотёлок. Наиболее удачно показатели молочной продуктивности сочетаются у животных линии Рефлекшн Соверинг в материнском поколении. В стаде дочерей животные линии Уес Идеал превосходят первотёлок других линий по важнейшим продуктивным признакам, хотя и уступают матерям.

Как видим, наиболее высокие значения коэффициента адаптации наблюдались у коров материнской дочерней генераций линий Уес Идеал и Рефлекшн Соверинг по совокупности признаков молочной продуктивности – по величине удоя за 305 дней лактации и массовой доле жира в молоке. Отличительной особенностью дочернего потомства импортных животных все анализируемых линий являлось, как видим, повышенное в сравнении с матерями содержание белка в молоке. Это можно объяснить большей консолидацией изучаемых признаков молочной продуктивности в генотипе животных за счёт грамотного отбора и подбора родительских пар и повышенного уровня кормления дочерей в сравнении с матерями.

Эти данные согласуются с ранее полученными результатами исследований стада ООО «Новое Щедрино» [5].

Таким образом, наиболее адаптированными и перспективными для разведения в условиях ООО «Новое Щедрино» и, в целом, Верхнем Поволжье России можно считать коров линии Уес Идеал и Рефлекшн Соверинг, однако необходимо вести селекционно-племенную работу с животными всех трёх разводимых в стаде линий, чтобы в перспективе увеличить степень консолидации селекционных признаков в последующих поколениях соответствующим улучшающим подбором родительских пар.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заднепрянский И.* Породы и интенсификация в молочном и мясном животноводстве [Электронный ресурс] // АГРО-ИНФОРМ [сайт]. Режим доступа: <http://www.agro-inform.ru/2010/02/porody.htm> (дата обращения: 17.07.2017).
2. *Мадисон В.В.* Не возите скот живём, не губите... [Электронный ресурс] / В.В. Мадисон, Л.В. Мадисон // AGROPROM.KZ Агропромышленный комплекс Казахстана [сайт]. Режим доступа: <http://www.agroprom.kz/info/novostipredpriyatij/ne-vozite-skot-zhivem-ne-gubite> (дата обращения: 17.07.2017).
3. *Мохов Б.П.* Крупный рогатый скот. Биологические и хозяйственные признаки: Монография. Ульяновск: ГСХА, 2006. 336 с.
4. Инструкция по бонитировке крупного рогатого скота молочных и молочно-мясных пород. М.: Колос, 1975. 30 с.
5. *Ермишин А.С.* Ранговая оценка по основным селекционным признакам импортного скота в России // Вестник ОрелГАУ. 2011. № 6 (33). С. 79–82.

УДК 581.5

Н. А. Кудрявцева, В. М. Дудин

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: dudinvn@ystu.ru

ВЛИЯНИЕ ПРОТИВОГОЛОЛЕДНЫХ РЕАГЕНТОВ НА ПРИРОДНУЮ СРЕДУ

В статье рассматривается влияние традиционных противогололедных реагентов на газонную траву, которую высаживают вдоль проезжей части.

Ключевые слова: противогололедный реагент, газонная трава.

N. A. Kudryavtseva, V. M. Dudin

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: dudinvn@ystu.ru

INFLUENCE OF ANTI-ICING REAGENTS ON THE NATURAL ENVIRONMENT

The article considers the influence of traditional anti-icing reagents on lawn grass, which is planted along the carriageway.

Keywords: anti-icing reagent, lawn grass.

Эффективность противогололедных материалов зависит от многих факторов, основными из которых являются: температура замерзания и концентрация растворов, плавящая способность, расход реагентов, вязкость растворов, коррозионная активность. Главное – знать: идеальных реагентов нет. У каждого существуют как свои плюсы, так и минусы.

Все противогололедные реагенты должны быть сертифицированы, иметь паспорт безопасности и быть безвредными для экологии и здоровья и удовлетворять следующим основным требованиям [1–2]:

- снижать точку замерзания воды при отрицательных температурах;
- быстро взаимодействовать и плавить снежно-ледяные отложения;
- не повышать скользкость дорожного покрытия до опасных значений;
- не вызывать вредного воздействия на дорожные покрытия;
- не угнетать зеленые насаждения;
- не оказывать отрицательного влияния на металл, резину и кожу;
- быть безвредными для здоровья человека и окружающей природной среды.

Само название «антигололедный реагент» говорит о том, что вещество вступает непосредственно в химическую реакцию с ледяным покровом.

вом, наледью, снежным накатом и др. Такой химический процесс зависит и от ряда факторов, как природно-температурных, метеорологических, так и химических. Но антигололёдные реагенты вступают в химические реакции не только с обледеневшим дорожным покрытием, но и с продуктами, выделяемыми транспортными средствами, такими как моторное масло, пары бензина, солянки, выхлопных газов, с компонентами почвы и с травами, посеянными для укрепления обочин и канав и т.д.

При использовании ПГМ для обеспечения безопасности движения автотранспорта и пешеходов возможно следующее негативное воздействие на окружающую среду:

- загрязнение атмосферного воздуха стационарными и передвижными источниками (специализированный транспорт, распределяющий ПГМ);

- химическое загрязнение земель в результате превышения рекомендуемых норм использования ПГМ, а также нерегламентированных утечек жидких ПГМ при нарушении технологии распределения ПГМ;

- засоление земель при ненормативном использовании противогололедных химических материалов;

- загрязнение грунтов и почвенно-растительного покрова, а как следствие оскудение растительности;

- возможное загрязнение земель, поверхностных и грунтовых вод составляющими компонентами ПГМ;

- аллергические и кожные заболевания граждан;

- агрессивное воздействие на металл, бетон, кожу, резину, вследствие чего разрушение конструкций дорожного полотна, порча материалов верхней одежды, обуви пешеходов.

Для уменьшения отрицательного влияния хлорида кальция на окружающую среду, а также для улучшения технологических характеристик в состав ПГМ вводят хлорид натрия, хлорид калия и другие реагенты. Эти реагенты обладают меньшим негативным воздействием на окружающую среду, при этом такие из них, как хлорида калия, мочевины являются наиболее распространенными удобрениями.

Кроме приведённых химических реагентов, в мировой практике используется сахар. Для его применения в условиях Российской Федерации необходимы исследования по определению его влияния на коэффициент трения, коэффициент сцепления асфальтобетонных покрытий с колесами автомобиля и влияние его на природную среду придорожной полосы.

В рамках научной работы в ЯГТУ были проведены исследования на непосредственное влияние растворов противогололедных реагентов различной концентрации на газонную траву (табл. 1).

Первоначально был подготовлен свежий грунт для посадки. Далее была произведена высева семян смеси из газонных трав и поливались

семена проточной трубопроводной водой. Всего было подготовлено по 3 контейнера с газонно для реагента, а также 3 контейнера для контроля. Использовались следующие растворы: нордвэй (концентрации 1, 1/2 и 1/3), экород (концентрации 1, 1/2 и 1/3), сахар (концентрации 1, 1/2 и 1/3). Когда высота травы достигла 12 см (замер шел от дна горшка), траву стали поливать концентрированными растворами.

Таблица 1. Свод результатов первого эксперимента

Дата	Описание
21.04.18	Травы первый раз были политы концентрированными растворами. Изменений нет.
23.04.18	Травы второй раз были политы концентратами. Изменений нет.
25.04.18	После второго полива стало заметно влияние реагентов. Газон, политый экородом и нордвеем, упал, стал вялым, начал стелиться по грунты. Газоны, политые водой и сахаром, не изменили своего внешнего вида. Травы политы третий раз.
28.04.18	Произведена поливка четвертый раз. Образцы «контроль» и «сахар» растут в пределах нормы, без пагубных отклонений. Высота образцов 7-8 см от корней. Образцы «экород» и «нордвэй» стали выглядеть хуже. Стебли травы упали, стали сухими, упали еще ниже. Высота образцов 5-6 см от корней.
3.05.18	После четвертого полива от почвы в образцах «нордвей» и «экород» стало сильно пахнуть «химией», у лотков были высохшие лужи растворов, грунт уже не принимал полностью концентрат. Травы выглядят сухими, погибшими. Образцы «контроль» и «сахар» выглядят стабильно, изменений нет. Длина стеблей не изменилась во всех образцах. Поливка произведена пятый раз.
7.05.18	После пятой поливки от почвы в образцах «нордвей» и «экород» стало еще сильнее пахнуть химией. Почва не задерживает растворы, у лотков остаются выпаренные соленые лужи. Газон погиб. Образцы «контроль» и «сахар» выглядят хуже, стебли опали, насыщенного зеленого здорового цвета нет. Длина стеблей не изменилась во всех образцах.

Далее был произведен следующий эксперимент. Оценивался всход семян газонной травы в уже засоленной почве. Их лотков были удалены все травы, почва прорыхлена, положены новые семена, а сверху уложили свежий грунт. Данные эксперимента представлены в табл. 2.

Таблица 2. Эксперимент по всходу семян в уже засоленной почве

Дата	Описание
15.05.18	Посадка в засоленный грунт новых семян. Полив проточной трубопроводной водой. Грунт в образцах «экород» и «нордвей» сильно пах концентратами, был серым и очень сухим. Грунт в образце «сахар» представлял собой большой слипшийся комок.
18.05.18	Повторный полив проточной трубопроводной водой.
21.05.18	Образцы «контроль» и «сахар» взошли. Всхожесть образца «контроль» такая же, как и в 1-м эксперименте, всхожесть образцов «сахар» намного меньше, чем в 1-м эксперименте. Высота ростков «контроль» от грунта 6-7 см, «сахар» 3-4 см. Также у образца «сахар 1/3» появилась корочка, которая приподняла свежий грунт. От образца «сахар» сильно пахнет сладковатым. Образцы «экород» и «нордвей» не взошли. На грунте «нордвейтах» появился белый налет.
25.05	Образцы «контроль» и «сахар» имеют размер стеблей 7-8 см. В целом состояние образцов не изменилось. Стебли «контроля» упали. Образцы «экород» и «нордвей» не взошли. Состояние не изменилось.

По результатам экспериментов были сделаны следующие выводы.

1. Противогололедный раствор «нордвей» в любой из концентраций (1, 1/2, 1/3) одинаково воздействовал на траву. Даже при концентрации 1/3 реагент, попадая в почву с растаявшим снегом, наносит пагубное влияние на корневую систему травы.

2. Противогололедный раствор «экород» в концентрации 1, 1/2 воздействует на газонную траву так же, как и растворы «нордвей», хотя произведены они на разных основах («экород» – хлористый кальций, «нордвей» – ацетатная основа, калий). Раствор концентрации 1/3 медленнее разрушал жизненную систему трав.

3. Растворы «сахар» не влияли пагубно на растения. Все влияние приходилось на грунт, частицы грунта склеивались липким раствором и плохо задерживали влагу, в итоге корни трав были переувлажнены, и стебли накали опадать.

4. Практически все противогололедные реагенты, применяемые в Ярославской области (нордвей, бишофит, экород, минеральная соль), в первую очередь направлены на антикоррозионное действие. Они пагубно влияют на природную среду придорожной полосы, даже в малых концентрациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГН 2.2.5.1313-03. Химические факторы производственной среды. Предельно допустимые концентрации (ПДК) вредных веществ в воздухе рабочей зоны. Гигиенические нормативы. М.: СТК Аякс, 2003. 268 с.
2. Требования к противогололедным материалам. ОДН 218.2.027-2003 (утв. распоряжением Минтранса РФ от 16.06.2003 N ОС-548-р).

УДК 661.856

Е. Л. Никитина, А. А. Курицына

Ярославский государственный технический университет
Россия, Ярославль, e-mail: nikitinael@ystu.ru

УТИЛИЗАЦИЯ ОТРАБОТАННЫХ МЕДЬСОДЕРЖАЩИХ РАСТВОРОВ

Рассматривается технология очистки отработанных медьсодержащих растворов, обеспечивающая возврат в производство меди и экологическую защиту окружающей среды.

Ключевые слова: цементация, медьсодержащие сточные воды, электромагнитный аппарат, травильный раствор.

E. L. Nikitina, A. A. Kuricyna

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: nikitinael@ystu.ru

DISPOSAL OF COPPER-CONTAINING SOLUTIONS

The technology of purification of waste copper-containing solutions providing a return to the production of copper and environmental protection of the environment is considered.

Keywords: cementation, copper-containing wastewaters, electromagnetic apparatus, pickling solution.

К числу одной из важных проблем современного общества относится загрязнение и истощение водных ресурсов, сброс отработанных промышленных вод. Гальваническое производство в электронном приборостроении остается источником загрязнения окружающей среды токсичными соединениями различных металлов, что представляется недопустимым с экологической точки зрения и нерациональным с точки зрения ресурсосбережения [1]. Согласно федеральной целевой программе “Отходы”, шламы сточных вод гальванических производств относятся к первому классу токсичности и объединены в группу по принципу обязательной утилизации и безопасного захоронения.

Травление меди является одной из основных операций в производстве печатных плат [2]. При этом применяется медно-аммиачный травящий раствор на основе солей хлористого аммония и аммиачных комплексов меди (+1, +2). Соединения меди, выносимые сточными водами гальванического производства, относят к высокотоксичным соединениям, обладающими канцерогенными и мутагенными свойствами, что может вызвать

тяжелое поражение живых организмов, в том числе и человека [3]. Ионы меди и ее соединений обладают токсическим действием на все живые организмы, поэтому ее ПДК для сброса в водоемы рыбохозяйственного назначения составляет не более 0,001 мг/л.

Основным методом удаления ионов тяжелых металлов почти на всех предприятиях РФ является реагентный, основанный на нейтрализации и осаждении металлов в форме гидроксидов или основных солей. Однако реагентный метод не обеспечивает нормативное качество воды для сброса не только в водоем, но и в канализационную сеть. Кроме того, общим недостатком существующих технологий извлечения ионов меди является применение дорогостоящих реагентов, сложность эксплуатации. В связи с этим разработка ресурсосберегающей технологии очистки отработанных медьсодержащих растворов травления является актуальной. В промышленных условиях для осаждения меди нашли применение два способа: цементация и электролиз. Выбор способа осаждения в первую очередь определяется ее содержанием в растворах. Цементация – электрохимический процесс, протекающий на поверхности металлических частиц с растворенными ионами и при котором происходит растворение металла и вытеснение из раствора в осадок [4, 5].

Целью данной работы явилось исследование процесса переработки медьсодержащих отработанных растворов с помощью цементации железной стружкой в электромагнитном аппарате. При цементации меди использовали железную стружку с размером частиц от 5-10 мм. Предварительными исследованиями было установлено, что при комнатной температуре выделение меди на железной стружке происходит медленно и при незначительном ее количестве. Травильный раствор имеет следующий состав: Fe^{+3} - 70 г/л, Fe^{+2} - 96 г/л, Cu^{+2} - 60 г/л. Даже десятикратное превышение количества стружки сверх стехиометрического в течение суток снизило содержание меди в травильном растворе с 60 до 3 г/л [6].

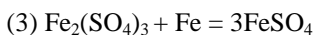
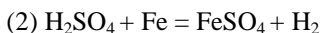
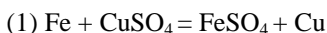
Известен способ интенсификации проведения различных процессов в электромагнитных аппаратах [7, 8]. В них можно реализовать целый комплекс воздействий на перерабатываемый материал – интенсивное перемешивание, диспергирование, электромагнитная обработка, трение, высокие локальные давления магнитно-твердых (МТМ) и магнитно-мягких материалов (МММ). Реализация таких энергетических воздействий на обрабатываемый материал позволяет предположить возможность возбуждения в нем механохимических процессов.

Восстановление меди проводилось на модельных растворах сульфата меди с концентрацией 20, 50, 70 г/дм³ стальной стружкой при мольном соотношении (Cu:Fe = 1:1) в электромагнитном аппарате (ЭМА). В ЭМА используется энергия переменного поля и магнитных рабочих элементов, движущихся под воздействием этого поля. ЭМА состоит из электрической обмотки (индуктора), рабочей камеры (реактора) и магнитных

рабочих элементов. При включении индуктора в электрическую цепь переменного тока рабочие элементы подвергаются воздействию магнитного поля, приводятся в интенсивное хаотическое движение. Использовали ЭМА с частотой 50 Гц, индукцией переменного магнитного поля 0,3 Тл, напряженностью магнитного поля 450 А/см, создаваемого предварительно намагниченными магнитными элементами, изготовленными из магнитотвердого материала. Под действием удара и трения происходит измельчение обрабатываемого материала до коллоидного состояния. Материал реактора инертен по отношению к компонентам раствора. Процесс проводили в течение 1, 2, 3 минут. Величина pH раствора в процессе цементации была 5-6.

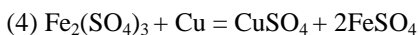
Остаточную концентрацию металла в растворе определяли по калибровочным зависимостям на железо и медь.

Основные электрохимические реакции в процессе цементации меди железом:

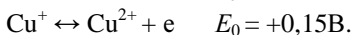
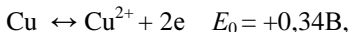
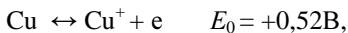


Медь переходит в осадок, удаляемый из реактора последующим фильтрованием и промывкой водой. Для удаления примесей, содержащихся в цементной меди, использовали раствор соляной кислоты (1:1). В результате подобной промывки получается товарная медь, имеющая высокую степень чистоты. Методом седиментационного анализа определен размер частиц дисперсной фазы.

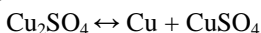
За счет того, что в процессе цементации помимо осаждения меди протекают побочные реакции, выход продукта может быть меньше стехиометрического:



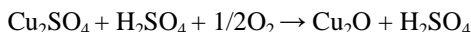
Растворение цементного осадка по реакциям (4), (5) снижает степень извлечения меди и зависит от ряда факторов. В состоянии кинетического равновесия одновременно протекают 3 реакции:



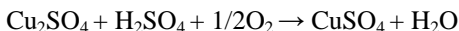
Скорость и предел растворения меди определяется установившимся равновесным потенциалом. Ионы одновалентной меди неустойчивы в сульфатных растворах и самопроизвольно переходят в двухвалентные с образованием медного порошка.



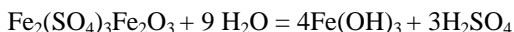
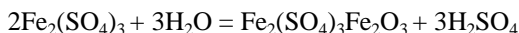
В нейтральных растворах происходит гидролиз с образованием темно-красных кристаллов закиси меди:



В кислых растворах происходит преимущественно окисление кислородом, находящемся в растворе:



Отсутствие в растворе достаточного количества свободной серной кислоты, создает благоприятные условия для гидролиза железа:



Цементация меди протекает до некоторой предельной концентрации ионов меди в растворе, при которой потенциал меди снижается до состояния равновесия в системе [9].

Таблица 1. Параметры процесса восстановления меди из раствора сульфата меди с исходной концентрацией 20 г/дм³

Продолжительность, мин	Выход продукта от теоретического, %	Средний размер частиц меди, мкм	Содержание металлов в осадке, %	
			меди	железа
1	46,9	7,67	68	32
2	47	4,97	72	28
3	80,6	5,04	91,5	8,5

Таблица 2. Параметры процесса восстановления меди из раствора сульфата меди с исходной концентрацией 50 г/дм³

Продолжительность, мин	Выход продукта от теоретического, %	Средний размер частиц меди, мкм	Содержание металлов в осадке, %	
			меди	железа
1	50,5	6,32	96,4	3,6
2	55	7,77	97,8	2,2
3	77	5,21	99	1

Таким образом, с увеличением продолжительности обработки увеличивается дисперсность меди. Установлено, что чем выше исходная концентрация медьсодержащего раствора, тем выше содержание меди в осадке и выше ее дисперсность.

Влажный медный концентрат можно подвергнуть сушке в атмосфере азота в присутствии этилового спирта при температуре 300-400⁰С. В процессе сушки, окись меди восстанавливается парами спирта до металлической меди:

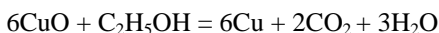


Таблица 3. Параметры процесса восстановления меди из раствора сульфата меди с исходной концентрацией 70 г/дм³

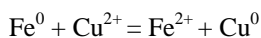
Продолжительность, мин	Выход продукта от теоретического, %	Средний размер частиц меди, мкм	Содержание металлов в осадке, %	
			меди	железа
1	60,54	3,34	98,1	1,9
2	74,5	4,73	99,1	0,9
3	88,8	3,22	100	0

Для утилизации отработанного медно-хлоридно-аммиачного раствора разработаны и использованы следующие стадии процесса:

1. Разрушение медно-аммиачного комплекса и подкисление



2. Восстановление меди



3. Фильтрация и промывка осадка водой.
4. Сушка осадка с получением медного порошка.
5. Стоки от фильтрации и промывки осадка цементной меди обрабатывают щелочным раствором с образованием магнитного осадка, который промывают водой до pH = 7-8 и сушат при $t = 100^{\circ}\text{C}$. Полученный продукт обладает магнитными свойствами и может быть использован в магнитно-резонансной томографии, системах хранения данных, различных детекторах и системах иммуноанализа, магнитоуправляемых жидкостях.

Выводы

1. Разработана ресурсосберегающая технология очистки отработанных медьсодержащих растворов, обеспечивающая возврат в производство меди и экологическую защиту окружающей среды.

2. Проведение предложенного способа цементации меди из медьсодержащих растворов в электромагнитном аппарате позволяет за счет упрощения технологии, сокращения расхода реагентов и времени получить порошок меди высокой степени дисперсности.

3. Установлено, что чем выше исходная концентрация медьсодержащего раствора, тем выше содержание меди в осадке и выше ее дисперсность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Виноградов С.С.* Экологически безопасное гальваническое производство. М., 2002. 352 с.
2. *Скубилин М.Д.* Проблемы ресурсосбережения и экологической безопасности в гальванотехнологии / М.Д. Скубилин, А.В. Письменов, Б.А. Гусев // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2004. №2. С. 46–51.

3. Прокопенко В.А. Использование гальванокоагуляционных процессов для обезвреживания меди из отработанных растворов производства печатных плат / В.А. Прокопенко, Е.Н. Лавриненко // Экотехнологии и ресурсосбережение. 2005. №4. С. 24–30.
4. Рагузин Д.В. Утилизация отработанных медьсодержащих травильных растворов с помощью процессов цементации / Д.В. Рагузин, Л.А. Сергеева, Д.А. Воробьева // Науч.-метод. электронный журнал «Концепт». 2017. Т.39. С. 2926–2930.
5. Способ цементации медьсодержащих растворов: пат. 2640704 РФ, МПК В 22А 9/24 С22В15/00 / Е.Л. Никитина, Г.А. Ефимова.
6. Бабенко С.А. Пути переработки травильных растворов / С.А. Бабенко, В.П. Пишулин // Изв. Томск. политехн. ин-та им. С.М. Кирова. 1975. Т. 259. С.37–39.
7. Никитина Е.Л. Использование электромагнитных аппаратов для защиты окружающей среды / Е.Л. Никитина, М.Е. Касалимова, Ю.Т. Гайнулина, А.А. Шевелев // 65-я Всерос. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов высших учебных заведений с междунар. участием: тез. докл. Ярославль: ЯГТУ, 2012. С.191.
8. Шевелев А.В. Нейтрализация кислых стоков в аппарате с магнитно-кипящим слоем / А.В. Шевелев, Г.А. Ефимова, В.М. Макаров, В.Ф. Лузев // Сб. науч. тр. Междунар. науч.-техн. конф. “Современные тенденции в науке: новый взгляд”. Тамбов: Изд-во ТГУ, 2011. С.183-184.
9. Даценко В.В. Решение экологических проблем при утилизации компонентов сточных вод гальванических производств // Восточно-Европейский журн. передовых технологий. 2012. Т. 6, №10, С.33–38.

УДК 523.531

Н. А. Седьмов, А. А. Залуцкий, Е. Н. Школьников

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: cross@yandex.ru;
zalutskii@mail.ru; sh.e.n@mail.ru

КИНЕТИКА РАЗРУШЕНИЯ МАГНИТНЫХ МИКРОЧАСТИЦ В ВЕРХНИХ ГОРИЗОНТАХ ПОЧВЫ

В ходе модельного эксперимента, для восьми образцов магнитных микро-частиц различного происхождения, моделировался промывной водный режим, характерный для гидроморфных почв. Интенсивность изменения магнитной восприимчивости и намагниченности насыщения с течением времени для представленных образцов различна. Установлено наличие двух скоростей разрушения магнитных микрочастиц – “быстрая” и “медленная”.

Ключевые слова: магнитная частица, магнитная восприимчивость, магнетит, окислительно-восстановительные условия.

N. A. Sed'mov, A. A. Zalutskii, E. N. Shkol'nikov

Yaroslavl State Technical University
Russia, Yaroslavl, e-mail: *cross@yandex.ru*;
zalutskii@mail.ru; *sh.e.n@mail.ru*

KINETICS OF DESTRUCTION OF MAGNETIC PARTICLES IN THE UPPER SOIL HORIZONS

The process of destruction of magnetic microparticles under conditions in the leaching regime of hydro-morphological soils is studied. Eight samples of different origin were studied. There were samples of both technogenic origin and separate soil horizons. Found two speed of the destruction of the magnetic susceptibility and magnetization: the "fast" and "slow".

Keyword: *magnetic particle, magnetite, magnetic susceptibility, redox conditions.*

Введение. Сильномагнитные сферические частицы различного происхождения (техногенного, космического, вулканического) выпадают из атмосферы на поверхность Земли, аккумулируются в верхних горизонтах почв и горных пород и вносят существенный вклад в формирование их магнитных свойств. [1-3]. По нашим расчетам, каждые 10 лет магнитная восприимчивость верхнего сантиметрового слоя почвы должна увеличиваться в два раза [4].

Однако в гидроморфных почвах, которые подвергаются временному или постоянному переувлажнению, этого не наблюдается. По всей видимости, в данных почвах магнитные частицы достаточно быстро разрушаются. Поступая извне в почву, они подвергаются воздействию процессов, характерных для данного типа почвообразования [5]. Одним из основных процессов в гидроморфных почвах является смещение окислительно-восстановительного равновесия в сторону восстановительных условий. На развитие восстановительных условий влияет наличие избыточного количества влаги и биологическая активность микроорганизмов [6]. Наличие органического вещества в почве стимулирует понижение *Eh*.

1. Объекты и методы. С целью изучения процесса разрушения магнитных сферических частиц, происходящего в восстановительных условиях почвы, был поставлен опыт по моделированию процесса оглеения. Имитировался промывной водный режим почвы при отсутствии поступления магнитных частиц из атмосферы. Опыт ставился в два этапа.

На первом этапе изучалось временное изменение магнитной восприимчивости и намагниченности насыщения, происходящие в верхнем горизонте чернозема из Курской области. Данный объект был выбран вследствие того, что магнитная фракция A_{max} состоит практически из одних сферических частиц (сферул).

В начале эксперимента образец чернозема в воздушно-сухом состоянии растирали до однородного состояния, просеивали через сито с размером ячейки 0,5 мм и засыпали по 5 г в 15 пробирок. Затем в каждую пробирку по 11 см³ раствора свекловичного сахара. Концентрация раствора равнялась 0,01 г/см³. Сахар добавляли как энергетический материал для стимулирования биологической активности микроорганизмов в образце. Пробирки с содержимым встряхивали и давали отстояться при комнатной температуре. Через неделю надсадочную жидкость из каждой пробирки сливали и заливали свежий раствор сахара. Эту циклическую последовательность действий можно рассматривать как модель промывного водного режима. Каждый раз, при смене раствора, один из образцов отбирали на измерение магнитных параметров. Сушку образца проводили при температуре 105 °С.

Намагниченность насыщения измеряли методом Фарадея на установке, описанной [4]. Калибровка установки проводилась по соли Мора, масса навески при измерении составляла 30-50 мг. Случайная ошибка измерения с учетом неоднородности образца не превышала 5 %. Начальную магнитную восприимчивость измеряли на автоматическом цифровом приборе KLY-2. Объем образца составлял 2 см³, масса – 1,5...1,8 г. Относительная погрешность прибора равняется 2 %.

На втором этапе эксперимента изучался процесс изменения магнитной восприимчивости для модельных систем, которые содержали магнитные сферические частицы техногенного происхождения и зерна титаномагнетита, выделенные из горной породы. Выяснялось также влияние условий опыта на скорость разрушения восприимчивости в различных горизонтах почвы. Для проведения этой части эксперимента было приготовлено шесть образцов, характеристики которых представлены в табл. 1.

Таблица 1. Характеристика образцов и условий модельного эксперимента по разрушению магнитных сферических частиц

Образец	С о с т а в	Условия эксперимента
1	Смесь кварцевого песка и магнитных сферул из промышленной пыли, соотношение 100:1	Заливка раствором сахара на основе почвенной вытяжки, концентрация 0,005 г/см ³
2	Смесь кварцевого песка и зерен магнетита, соотношение 100:1	Заливка раствором сахара в дистиллированной воде, концентрация 0,005 г/см ³
3	Чернозем типичный, горизонт $A_{\text{пах}}$	Заливка раствором сахара в дистиллированной воде, концентрация 0,005 г/см ³
4	Чернозем типичный, горизонт $C_{\text{к}}$	
5	Чернозем типичный, горизонт $A_{\text{пах}}$	Чистая дистиллированная вода
6	Чернозем типичный, горизонт $C_{\text{к}}$	

Образцы 1 и 2 являются модельными и не содержат микроорганизмов, необходимых для развития процесса оглеения. Поэтому для них раствор сахара готовился на основе почвенной вытяжки. Для этого навеска дерново-подзолистой почвы гор. A_1 массой 50 г заливалась 150 см³ дистиллированной воды и тщательно перемешивалась. Через сутки отстой сливался и в него добавлялся сахар до получения концентрации 0,005 г/см³. В образцы 1 и 2 заливалось по 10 см³ данного раствора. Образцы 3 и 4 заливались раствором сахара в дистиллированной воде концентрацией 0,005 г/см³, а образцы 5 и 6 – чистой дистиллированной водой.

Моделирование промывного режима проводилось по той же методике, что и в первой части опыта. При измерении магнитной восприимчивости образцы не извлекались из пробирки, а вместе с ней помещались в измерительный блок KLY-2. На восприимчивость пробирки при расчете величины магнитной восприимчивости образцов вводилась поправка. В результате этого отпала необходимость готовить серию проб для каждого из образцов, как это делалось в первой части эксперимента.

Кроме того, такая методика измерения магнитной восприимчивости позволила существенно снизить погрешность, обусловленную неоднородностью отдельных проб в пределах одного образца.

2. Обсуждение результатов. Результаты, полученные для первой серии образцов, показаны на рис. 1 в виде зависимости натурального логарифма магнитной восприимчивости ($\ln\chi$) и натурального логарифма намагнитченности насыщения ($\ln J_s$) от времени.

Масса всех образцов 5 г.

Объем заливаемого раствора в каждый образец – 10 см³

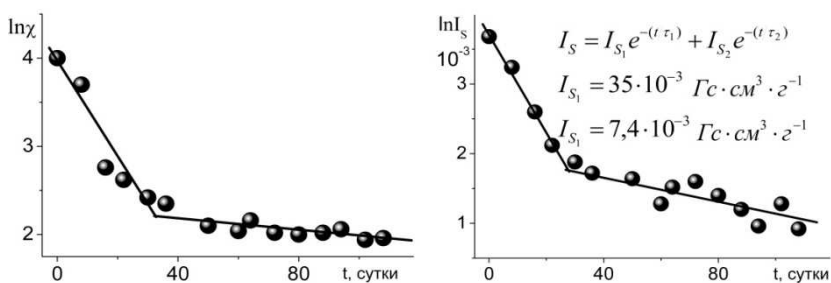


Рис. 1

Как видно из рис. 1, в полулогарифметических координатах изменения этих магнитных характеристик хорошо описываются прямой. Поэтому зависимость данных параметров от времени можно представить экспоненциальной функцией.

Для намагнитченности насыщения она имеет вид $J_s = J_{so} \exp(-t/\tau)$, где J_{so} – начальное значение намагнитченности насыщения; J_s – текущее

значение намагниченности насыщения; τ – характеристическое время, в течение которого намагниченность уменьшается в e раз; t – текущее время.

Аналогично, для магнитной восприимчивости $\chi = \chi_0 \cdot \exp(-t/\tau)$.

Видно, что намагниченность насыщения вначале быстро падает от величины $38 \cdot 10^{-3}$ Гс·см³/г до значений $(5...7) \cdot 10^{-3}$ Гс·см³/г, а затем медленно уменьшается до $2 \cdot 10^{-3}$ Гс·см³/г в конце опыта. Аналогичные изменения наблюдаются и для магнитной восприимчивости. В течение трех недель ее величина быстро уменьшается от значения $52 \cdot 10^{-6}$ см³/г в исходном образце до $15 \cdot 10^{-6}$ см³/г, а после этого медленно падает до $(7...8) \cdot 10^{-6}$ см³/г.

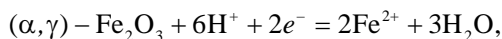
Полученные результаты позволяют предположить наличие в исходных образцах магнетиков разного происхождения, которые имеют различные скорости разрушения – “быструю” и “медленную”.

Результаты второй части эксперимента представлены на рис. 2. Для образцов 1 и 3 тенденция магнитной восприимчивости с течением времени аналогична той, которая наблюдалась в первой части опыта. В начале процесса восприимчивость достаточно быстро уменьшается, затем ее изменение замедляется. Оба эти образца, несмотря на то что один из них является модельным (обр. 1), а другой представляет почву в целом (обр. 2), содержат сферические магнитные частицы. По всей видимости, именно этим объясняется сходный характер изменения магнитной восприимчивости для этих объектов.

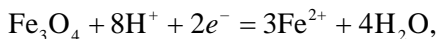
Для образцов 2 и 4 также можно выделить две скорости изменения восприимчивости, но их величина на порядок меньше, чем для образцов 1 и 3. Носителями магнитных свойств в данном случае являются не сферические магнитные частицы, а зерна магнетита: либо выделенные из горной породы (обр. 2), либо унаследованные от материнской породы, на которой развивалась почва (обр. 4).

В образце 5 разрушение магнитной восприимчивости идет чрезвычайно медленно, а в образце 6 вообще не наблюдается. Это связано с отсутствием сахара, который являясь стимулятором жизнедеятельности почвенных микроорганизмов, значительно ускоряет процесс оглеения.

Главной причиной изменения магнитных свойств образцов является восстановительное растворение оксидов железа, происходящее в соответствии с уравнениями [7]:



$$Eh = 0,728 - 0,0591 \cdot \lg[\text{Fe}^{2+}] - 0,177\text{pH},$$



$$Eh = 0,980 - 0,0885 \cdot \lg[\text{Fe}^{2+}] - 0,236\text{pH}.$$

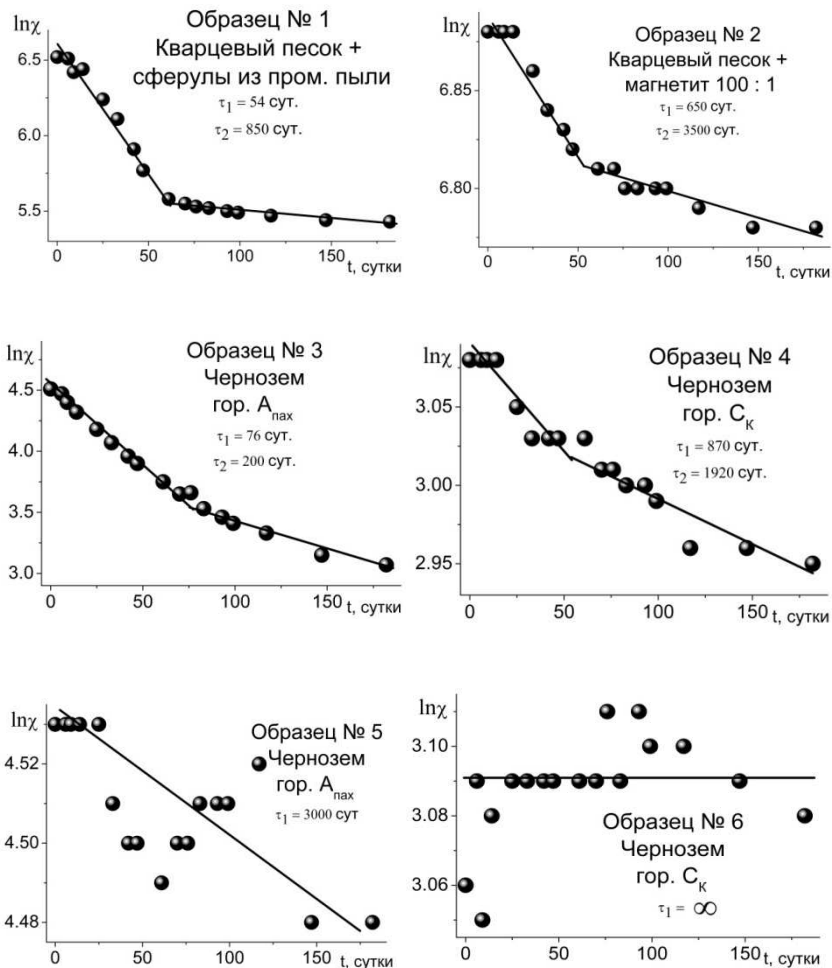


Рис. 2

Именно ионы двухвалентного железа являются устойчивыми при значениях pH и Eh, наблюдаемых в эксперименте. Расчеты же по вышеприведенным уравнениям показывают, что равновесие в системе «Fe²⁺ – оксид железа» для оксидов типа Fe₂O₃ достигается при меньших концентрациях двухвалентного железа, т.е. растворение, γ -Fe₂O₃ (гематита, маггемита) будет происходить медленнее, чем магнетита.

Наблюдая за скоростью изменения магнитных характеристик представленных образцов, можно выделить две компоненты (скорости) умень-

шения магнитной восприимчивости и намагниченности насыщения: «быструю» и «медленную». При этом время τ этих компонент отличается на порядок. Скорость разрушения магнитной восприимчивости для образцов, содержащих сферические магнитные частицы, наибольшая. Так для образца 1 время $\tau_1 = 54$ суток, а для образца 3 – $\tau_1 = 76$ суток.

Восприимчивость образцов, имеющих в своем составе зерна магнетита, меняется гораздо медленней. Для образцов 2 и 4 характеристическое время «быстрой» компоненты на порядок больше, чем у образцов 1 и 3 (650 и 870 суток соответственно). Примечательно, что эти значения по порядку величины совпадают с характеристическим временем «медленной» компоненты разрушения восприимчивости для образцов 1 и 3.

Для трех образцов чернозема (гор. $A_{\text{пах}}$) получены различные значения времени τ_1 . Это связано с тем, что концентрация сахара в растворе, которым они заливались, менялась: в первом случае она равнялась $0,01 \text{ г/см}^3$, во втором – $0,005 \text{ г/см}^3$, для третьего образца использовалась чистая вода. Естественно, что чем выше содержание сахара в растворе, тем интенсивнее идет процесс оглеения и тем быстрее уменьшается восприимчивость.

Надо отметить, что условия эксперимента для образцов 5 и 6 наиболее приближены к реальным условиям. И величина $\tau \approx 3000$ суток, по видимому, характеризует скорость разрушения носителей магнитных свойств верхнего горизонта чернозема в естественных условиях. Через время $t = \tau$, при отсутствии поступления магнитного материала извне, магнитная восприимчивость горизонта $A_{\text{пах}}$ должна уменьшиться в e раз. Однако этого не наблюдается, так как имеется постоянный приток магнитных частиц в данный горизонт из атмосферы. И здесь сталкиваются два конкурирующих процесса: накопление магнитных минералов и их разрушение. В результате этого устанавливается динамическое равновесие и величина восприимчивости остается неизменной.

Для изменения намагниченности насыщения наблюдается такая же тенденция, как и для восприимчивости. Так на первом этапе эксперимента для намагниченности насыщения получено $\tau_1 = 12$ суток и $\tau_2 = 105$ суток, для магнитной восприимчивости $\tau_1 = 15$ суток и $\tau_2 = 150$ суток. Завышенные значения τ_1 и τ_2 для магнитной восприимчивости обусловлены влиянием парамагнитного вклада, который практически не изменяется и находится в пределах $(4...5) \cdot 10^{-6} \text{ см}^3/\text{г}$. С понижением восприимчивости этот вклад ведет к завышению τ .

Выводы. Сравнивая результаты, полученные для образцов 1-6, можно сделать предположение, что процесс разрушения носителей магнитных свойств в реальных природных объектах, таких как почва, описывается набором экспонент, характеристические времена которых отличаются на порядок. При наличии «быстрой» компоненты более «медленные» маскируются и не заметны при анализе результатов. Поэтому достаточно

уверенно фиксируются лишь две компоненты. Их наличие свидетельствует о том, что в исследованных образцах существуют две разновидности магнетиков, отличающихся устойчивостью к растворению в одинаковых восстановительных условиях.

Исходя из того, что повышенная магнитная восприимчивость горизонта $A_{\text{пах}}$ черноземов обусловлена наличием в нем магнитных частиц, образовавшихся в материнской породе и унаследованными почвой, а также попавшими в почву из атмосферы в виде магнитных сферических частиц, можно предположить, что с этими магнетиками и связаны обнаруженные экспоненты. Причем условия образования сферических частиц существенно отличаются от термодинамических условий в почве, поэтому они и являются в ней менее устойчивыми. В пользу этого свидетельствует и то, что τ_1 для модельного образца 1, содержащего сферулы техногенного происхождения, практически совпадает с τ_1 для горизонта $A_{\text{пах}}$ чернозема.

Полученные результаты свидетельствуют о слабой устойчивости магнитных сферических частиц техногенного происхождения (образцы 1 и 3) в условиях оглеения и относительно высокой устойчивости в восстановительных условиях магнитных частиц, наследуемых от почвообразующей породы (образцы 2 и 4). Тем самым объясняется отсутствие возрастания магнитной восприимчивости вверх по профилю в гидроморфных почвах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седьмов Н.А.* Динамика притока магнитных сферических частиц на поверхность Земли / Н.А. Седьмов, А.А. Залуцкий // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 10. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2015. С. 91–96.
2. *Седьмов Н.А.* Мессбауэровская спектроскопия магнитной фракции из глубоководных океанических отложений / Н.А. Седьмов, А.А. Залуцкий // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 11. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2016. С. 78–84.
3. *Седьмов Н.А.* Мессбауэровская спектроскопия магнитной фракции из торфов верховых болот / Н.А. Седьмов, А.А. Залуцкий, Е.Н. Школьников // Математика и естественные науки. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 12. Ярославль: Издат. дом ЯГТУ, 2017. С. 368–374.
4. *Бабанин В.Ф.* Состав и свойства сильномагнитных фракции из почв и осадков Ярославской области / В.Ф. Бабанин, А.В. Иванов, И.А. Куткин, Н.А. Седьмов. Деп. ВИНТИ. 1985. № 2048-85. 18 с.
5. *Вадюнина А.Ф.* Магнитная восприимчивость некоторых почв СССР / А.Ф. Вадюнина, В.Ф. Бабанин // Почвоведение. 1972. № 10. С.55–66.
6. *Глазовская М.А.* Геохимические функции микроорганизмов / М.А. Глазовская, Н.Г. Добровольская. М.: МГУ, 1984. 152 с.
7. *Гаррелс Р.М.* Растворы, минералы, равновесия / Р.М. Гаррелс, И.Л. Крайст. М.: Мир. 1968. 368 с.

УДК 539.17:539.126:631.48

**А. А. Залутский, Н. А. Седьмов, А.Ю. Соколов,
Е. Н. Школьников**

Ярославский государственный технический университет
Россия, г. Ярославль, e-mail: zalutskii@mail.ru,
cross@yandex.ru, sokolov6219@mail.ru, sh.e.n@mail.ru

МЕССБАУЭРОВСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАЗИЖИДКОГО СЛОЯ НА АЛЮМОСИЛИКАТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИРОДНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

Приводятся экспериментальные результаты по структуре и свойствам квазизжидкого слоя воды в системе «замороженная вода – глинистый минерал» при использовании зондовой методики, разработанной на базе мёссбауэровского изотопа ^{57}Fe в двух формах (Fe^{2+} и Fe^{3+}). Задача решалась при помощи анализа температурного поведения мессбауэровских параметров экспериментальных спектров в рамках физической (квантовой и/или классической) природы аномалий и свойств воды. Температурная трансформация мёссбауэровских спектров исследуемой системы качественно объяснялась с помощью моделей, традиционно описываемых фазовые переходы двух типов («порядок-беспорядок» и «порядок-порядок»). Если в трёхмерном случае плавление всегда происходит посредством перехода первого рода, то в двумерном – из множества вариантов установлен сценарий плавления. Согласно таковому система плавится посредством двух непрерывных переходов Березинского – Костерлица – Таулеса с наличием в ней промежуточной гексатической фазы, характеризующей квазидальним ориентационным порядком. Установлено, что первый непрерывный переход обусловлен сегнетоэлектрическим фазовым переходом, а причина второго перехода носит квантовый характер и требует, по-видимому, дополнительных исследований. Проведена попытка количественной оценки упругих параметров (модуль сдвига, коэффициент Пуассона, параметр Грюнайзена) у поверхностного льда. При этом его структура удовлетворительно описывалась в рамках фрактальной геометрии и с уменьшением толщины слоя установлен переход «Губка Менгера» → «Пыль Канторова».

Представленные результаты будут полезны в решении проблемы поиска жидкой воды на Марсе, поскольку диагностика наличия КЖС на поверхности льда методом МС может являться характерным признаком присутствия «свободной» воды на красной планете.

Ключевые слова: Мёссбауэровская спектроскопия, квазизжидкий слой воды, фазовые переходы первого и второго рода, сегнетоэлектрический фазовый переход, топологический фазовый переход, двумерное плавление, переход Березинского – Костерлица – Таулеса, модуль сдвига, коэффициент Пуассона, параметр Грюнайзена, фракталы, фрактальная геометрия, губка Менгера, пыль Канторова, Марс.

**A. A. Zalutskii, N. A. Sed'mov, A. Yu. Sokolov,
E. N. Skolnikov**

Yaroslavl state technical university,
Russia, Yaroslavl, e-mail: zalutskii@mail.ru
cross@yandex.ru, sokolov6219@mail.ru, sh.e.n@mail.ru

MOSSBAUER STUDY A QUASI-LIQUID LAYER ON THE ALUMINOSILICATE SURFACE NATURAL ORIGIN

Experimental results on the structure and properties of the quasi – liquid water layer in the system "frozen water-clay mineral" are presented using the probe technique developed on the basis of the mössbauer isotope ^{57}Fe in two forms (Fe^{2+} and Fe^{3+}). The problem was solved with the help of the analysis of the temperature behavior messbauevskoi parameters of experimental spectra in the framework of the physical (quantum and/or classical) nature of the anomalies and properties of water. The temperature transformation of the mössbauer spectra of the system under study was qualitatively explained by the models traditionally described as two types of phase transitions ("order-disorder" and "order-order"). If in the three – dimensional case, melting always occurs by means of the first kind of transition, then in the two-dimensional case, the melting scenario is established from a variety of options. According to this, the system melts by means of two continuous transitions of Berezinsky – Kosterlitz – Taules with the presence of an intermediate hexatic phase characterized by a quasi-initial order. It is found that the first continuous transition is due to the ferroelectric phase transition, and the cause of the second transition is quantum in nature and requires, apparently, additional research. An attempt of quantitative evaluation of elastic parameters (shear modulus, Poisson's ratio, Gruneisen parameter) at the surface of the ice. At the same time, its structure was satisfactorily described in the framework of fractal geometry and with a decrease in the layer thickness, the Menger Sponge \rightarrow Kantor Dust transition was established.

The presented results will be useful in solving the problem of searching for liquid water on Mars, since the diagnosis of the presence of CHS on the ice surface by the MS method can be a characteristic feature of the presence of "fresh" water on the red planet.

Keywords: Mössbauer spectroscopy, quasi-liquid water layer, phase transitions of first and second kind, ferroelectric phase transition, topological phase transition, two-dimensional melting transition Berezinsky – Kosterlitz – Taules, shear modulus, Poisson's ratio, Gruneisen parameter, fractals, fractal geometry of the Menger sponge, dust, Cantoro Islands, Mars.

Введение. В 1850-е годы М. Фарадей предположил, что на поверхности льда имеется тонкий слой жидкой воды ниже температуры объемного плавления льда (273 К). Аргументацией в пользу этой гипотезы наглядно служил эксперимент, при котором вместе «сплавлялись» соприкасающиеся куски льда. Позже многочисленные экспериментальные и теоретические исследования (см., например, обзоры [1,2] и ссылки в них) под-

твердили наличие квазижидкого слоя (КЖС), но его физическое происхождение и свойства (толщина, плотность и т.п.) остаются и на настоящий момент предметом дискуссии. Действительно, с одной стороны, экспериментальные данные, выполненные с помощью спектроскопии генерации суммарных частот (Sum Frequency Generation (SFG)) [3], однозначно говорят о том, что КЖС есть не просто переходная стадия между льдом и водой, а представляет собой совершенно самостоятельную фазу. Отличительной особенностью ее строения является то, что этот КЖС выглядит даже более хаотичным, чем «обычная» жидкость. С другой стороны, спустя полтора десятилетия на базе той же экспериментальной методики SFG, правда, в дополнительном сочетании с теоретическими вычислениями методом молекулярной динамики (МД) были получены несколько другие результаты. Так, измерения показали [4], что КЖС по характеру организации сетки водородных связей больше похож на лед, чем на переохлажденную воду в объеме при той же температуре. Такая двойственная ситуация требует специального объяснения. Этот пробел будет частично ликвидирован в настоящей работе, в которой для изучения свойств КЖС нами разработан новый подход – метод зондовой мессбауэровской спектроскопии (МС).

Особо отметим, что данные о воде при использовании такого мощного с экспериментальной точки зрения метода, как МС, в литературе практически отсутствуют. По физическим соображениям такое состояние дел обусловлено тем, что жидкая вода весьма неудобный объект и необходима дополнительная затратная экспериментальная модернизация классического мессбауэровского эксперимента (см., например, [5]). С экспериментальной точки зрения проблема частично снималась с помощью процедуры замораживания исходных растворов, но, по-видимому, отсутствие должной физической информации о структуре воды на тот период времени сдерживало адекватную интерпретацию эпизодических мессбауэровских результатов. Однако для последнего десятилетия экспериментальных исследований водной структуры характерно использование синхротронных источников перестраиваемого по энергии рентгеновского излучения. Основным результатом последних экспериментов (см. ссылки в обзоре [6]) стал вывод о том, что вода на масштабах порядка 1...2 нм состоит из неоднородностей плотности с двумя структурно различающимися мотивами. Указанный факт совместно с нашими ранними данными [7] послужил мотивацией для проведения исследования методом МС гетерогенности поверхностных слоев переохлажденной воды. Задача решалась при помощи анализа температурного поведения мессбауэровских параметров экспериментальных спектров в рамках физической (квантовой и/или классической) природы аномалий и свойств воды [6]. Наряду с обнаружением в метастабильных модификациях льда широкого набора фазовых переходов (ФП) нами был разработан подход, позволяющий с помощью двух мессбауэровских зондов диагностировать спиновые изомеры воды. Это, с од-

ной стороны, объясняет на качественном уровне приведенную выше двойственность в поведении поверхностных жидких слоев льда, а с другой – дает возможность получить характерные для КЖС параметры (толщину, плотность, вязкость и т.п.) при использовании метода МС. Этому в основном и посвящена настоящая работа.

1. Методика эксперимента. Насыщающие растворы готовились из безводного хлорного железа (FeCl_3), полученного сжиганием металлического ^{57}Fe в атмосфере хлора. Величина концентрации железа в растворах выбиралась такой, чтобы наилучшим способом обеспечить эффективность мессбауэровского эксперимента. С другой стороны, верхнюю границу концентрации растворенных молекул подбирали с тем условием, чтобы избежать возникновения прочных связей между растворенными молекулами через растворитель как среду.

Привлечение в исследуемую систему алюмосиликатной поверхности объяснимо процессом гидратации монтмориллонита (с элементарным структурным слоем типа 2:1), т.е. образованию на поверхности глинистых частиц сплошной гидратной пленки «связанной» воды, отличающейся по своим свойствам от «свободной» воды. В результате рентгенографического исследования (см., например, [8] и ссылки) на экспериментальных кривых, описывающих изменение пространственного периода (d) алюмосиликатных пластин в стопке при набухании монтмориллонита, фиксируются параллельные «полочки» или «ступени».

Если теперь из величины d вычесть толщину алюмосиликатной пластины, то полученная таким образом толщина водного слоя оказалась точно кратна толщине одноатомного водного слоя, соответствующего структуре льда. Это было использовано при приготовлении образцов для решения поставленных задач, поскольку при строго постоянно фиксированной влажности объекта между алюмосиликатными пластинами укладывается целое число монослоев воды.

Для проведения мессбауэровских температурных исследований (90...330 К) использовали стандартный спектрометр, работающий в режиме постоянного ускорения [7]. Математическая обработка экспериментальных спектров осуществлялась с помощью программного комплекса MStools [9]. Из широкого набора обменных форм минералов, представляющих собой систему «раствор-монтмориллонит» (детальную кинетику временной трансформации соединений железа см., например, в [7]), в рамках решения поставленной задачи были выбраны два вида мессбауэровских зондов.

Первый зонд представлял собой суперпозицию двух парциальных спектров с параметрами, типичными для катионов Fe^{2+} , находящихся в высоко спиновом состоянии и двух неэквивалентных положениях (формы 1 и 2 на рис. 1, а). Спектр второго зонда характерен для трехвалентного железа, состоящего из димеров $[\text{Fe}_2^3+(\text{OH})_2]^{4+}$ и аморфных полимерных пленок (кластеров) (1 и 2 на рис. 1, б), соответственно).

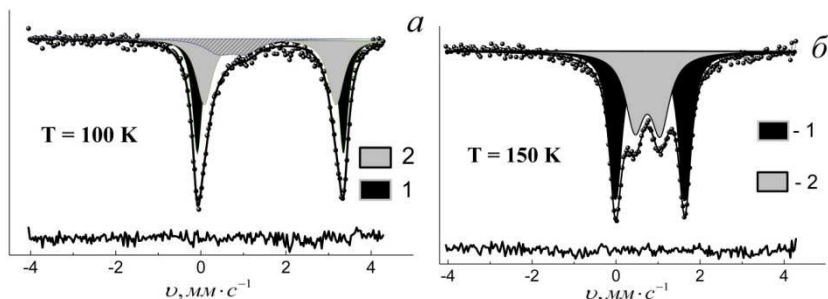


Рис. 1. Модельная расшифровка мессбауэровских спектров зондовых атомов ^{57}Fe в системе «лёд – поверхность монтмориллонита»:

a) 1 – форма 1 для Fe^{2+} и 2 – форма 2 для Fe^{2+} ; *б)* 1 – димеры железа $[\text{Fe}_2^{3+}(\text{OH})_2]^{4+}$ и 2 – кластеры железа

3. Результаты и обсуждение

3.1. Толщина КЖС.

В [10] была предложена и экспериментально осуществлена методика определения эффективного коэффициента поверхностной диффузии при различных толщинах слоя, в котором она осуществляется. Однако количественной оценке толщины (L) для КЖС не было уделено должного внимания.

Для решения задачи по определению величины L предварительно был проведен мониторинг теоретических и экспериментальных подходов для широкого класса систем. Общий итог анализа следующий: наши экспериментальные данные, полученные с помощью метода МС, находятся в качественном согласии с существующими на настоящий момент теоретическими подходами. Поэтому решение задачи существенно упрощается и сводится в основном только к адекватной корректировке поведения мессбауэровских параметров с теоретическими предсказаниями.

Для оценки толщины L_d КЖС воспользуемся теоретическим подходом [11], который прогнозирует, что при приближении температуры снизу к температуре перехода (T_m) поверхностная область в точности разупорядочивается на искомую глубину от поверхности кристалла, в то время как остальной объем тела остается упорядоченным.

В пользу такого процесса говорят наши экспериментальные данные по температурному поведению параметров у мессбауэровских зондов в замороженных пленках льда [12]. При этом нельзя не учитывать серию теоретических работ (см., например, [13]), где на основании решения уравнения Гинзбурга-Ландау для параметра порядка было получено аналитическое выражение для толщины КЖС льда вблизи его поверхности. Суммируя вышесказанное, можно предположить, что зависимость толщины расплавленного слоя L_d от температуры описывается логарифмическим законом роста

$$L_d(T) = L_0 \ln\left(\frac{T_s}{T_m - T}\right), \quad (1)$$

где T_s – температура начала разупорядочения; T_m – температура плавления.

Подстановка в (1) значений величин T_s и T_m , полученных из температурной зависимости поведения вероятности эффекта ($f' \propto S$) (рис. 2, а), позволила сделать оценку толщины КЖС. Анализ данных, базирующих на методике МС (рис. 3), указывает на удовлетворительное согласование с прямыми калориметрическими измерениями, выполненными в талых и мерзлых тонкодисперсных горных породах [14].

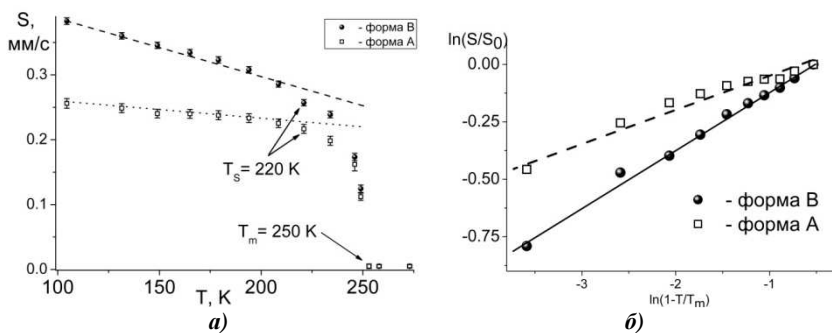


Рис. 2. Температурная зависимость (а) интенсивности мессбауэровской линии для кластеров (форма А) и димеров (форма В) железа в плёнке замороженной воды в глине (точки – эксперимент, линии – математическая обработка в рамках дебаевского приближения для колебательного спектра ядра). Стрелки указывают на температуру фазового перехода (T_m) и температуру начала процесса разупорядочения (T_s) в плёнках льда. Температурная зависимость (б), обработанная в рамках метода критических показателей [27]

Для наглядной графической иллюстрации дополнительно была проведена процедура линеаризации уравнения (1), результаты которой представлены на рис. 3 (см. вставку). Отдельно заметим, что с одной стороны наша толщина КЖС по порядку величины не отличается от значений, полученных с помощью метода ЯМР [15], а с другой – автоматически снимаются сомнения авторов работы [16] по поводу «малости» величины L_d .

3.2. *Плотность КЖС.* Для оценки плотности КЖС можно воспользоваться термодинамическим методом (см., например, [17]), позволяющим выразить искомую величину (ρ_L) следующим образом:

$$q_m \frac{\Delta T}{T_m} = - \frac{\Delta \gamma}{\rho_L} \frac{\partial f}{\partial d}, \quad (2)$$

где q_m – удельная теплота плавления льда; $\Delta \gamma$ – разница межфазных поверхностных энергий, $\Delta T = T_m - T$.

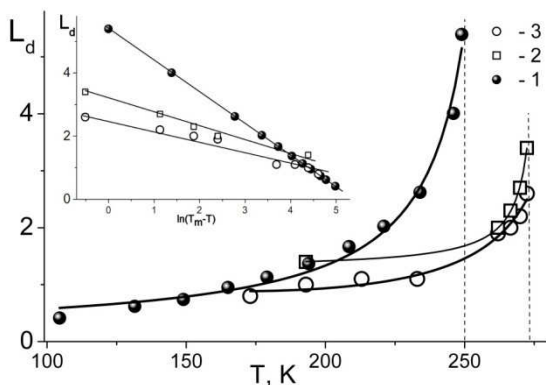


Рис. 3. Зависимость толщины пленки L_d незамерзающей воды на поверхности льда в различных подложках:
 1 – мотмориллонит (методика МС); 2 – бентонит (калориметрия [14]);
 3 – асканит (калориметрия [14]).
 Вставка – та же зависимость в линеаризованных координатах

Уравнение (2) может привести к теоретическому выражению для толщины КЖС при условии конкретного вида для межфазного потенциала $f(d)$. В нашем случае из широкого набора типичных потенциалов [18] лучше подходит тот, для которого характерен тип короткодействующих сил $\partial f / \partial d \propto \exp(-d/\lambda)$, где λ – постоянная величина. Аргументация такого выбора вида сил в основном базировалась на методике МС (анализ полуширины линии $\Delta\Gamma(T)$), которая позволила косвенным способом получить оценку характерной длины λ – типичную для короткодействующих сил. Таким образом, толщина КЖС варьируется с температурой

$$L_d = \lambda \ln \left(- \frac{\Delta\gamma}{\rho_L q_m \lambda} \frac{T_m}{\Delta T} \right). \quad (3)$$

Для образца с относительным давлением паров воды ($P/P_0 \gg 0,98$) при использовании (3) была определена средняя плотность КЖС ($\rho_L = 1,19 \text{ г/см}^3$), величина которой значительно выше, чем для объемной воды ($\rho = 1,0 \text{ г/см}^3$ при 273 К). Особо следует отметить, что значение измеренной плотности слоя очень близко к плотности аморфного льда (high density amorphous (HDA)) ($\rho_{\text{HDA}} = 1,17 \text{ г/см}^3$). На основании анализа фазовой диаграммы воды [19], где она может существовать в различных кристаллических и аморфных формах, можно заключить о тесном структурном подобии КЖС и HDA льда (см. дополнительно п. 3.4). При уменьшении влажности образца ($0,52 < P/P_0 < 0,98$) установлено резкое изменение плотности КЖС ($\rho_L = 0,76 \text{ г/см}^3$) по сравнению с объемной водой ($\rho =$

0,998 г/см³ при 263 К). С одной стороны, найденная величина плотности не вызывает какого-то недоразумения и типично для связанной воды в глинах (см., например, [20]), а с другой – автоматически возникает необходимость объяснить такой резкий скачок плотности.

Математический анализ формулы (3) указывает на то, что причина заключается в различной величине параметра $\Delta\gamma$, значение которого следует из энергетического баланса ($\Delta\gamma = \gamma_{LS} + \gamma_{VL} - \gamma_{VS}$). Действительно, с физической точки зрения энергетическая целесообразность появления жидкой пленки на поверхности твердого тела обусловлена неравенством $\gamma_{VS} > \gamma_{LS} + \gamma_{VL}$. Использование литературных данных по параметрам, входящим в энергетический баланс (см. обзор [21] для величин γ_{VS} , γ_{LS} и γ_{VL}), для оценки разницы $\Delta\gamma$ приводит к разумной величине плотности КЖС. Однако изменение толщины связанной воды ($0,52 < P/P_0 < 0,98$) приводит к существенному изменению условий фазового равновесия в приграничных слоях, что формально проявляется в уменьшении величины $\Delta\gamma$ по причине влияния алюмосиликатной поверхности. В пользу говорит факт, что для восстановления энергетического баланса замещающую роль вместо параметра γ_{VL} может играть энергия связи КЖС с глиной, поскольку с помощью метода МС [7] установлено равенство этих величин.

Сделаем попытку согласовать представленные выше значения плотности для КЖС базирующие на методике МС с литературными данными, полученными другими методами.

Сначала рассмотрим теоретический аспект рассматриваемого вопроса. Последовательная теория роста кристаллических структур, по Власову, (см., например [22, 24-26]), не может быть создана на основе метода, в котором используется классические или квантовые гамильтонианы с модельными потенциалами взаимодействия между атомами [23]. Это связано с тем, что при фазовых превращениях происходит перестройка электронных конфигураций атомов и, как следствие, изменение функциональной формы потенциалов взаимодействия. Поэтому учет изменения со временем формы потенциалов взаимодействия является необходимым условием для корректного анализа кинетики роста кристаллов. С физической точки зрения адекватно временную эволюцию взаимодействий систем частиц могут дать уравнения с самосогласованным полем. Впервые такой подход, положенный в основу кинетики фазовых переходов, был предложен Власовым [22]. Метод принципиально отличается от общепринятых в физике конденсированного состояния [23], где по Власову «кристаллическая решетка не выводится в такой теории, а вводится», и подробно в деталях представлен монографиях [24, 25].

Опуская математические аспекты подхода, можно заключить, что наши экспериментальные данные удовлетворительно согласуются в рамках подхода Власова (рис. 4, а).

Аномально высокие значения плотности (точка 2 и 3 на рис. 4, б) тесно связаны с эффектом полиморфизма жидкой воды, т.е. разделению воды на две фазы, одна из которых по сравнению с объемной водой обладала уникальными свойствами.

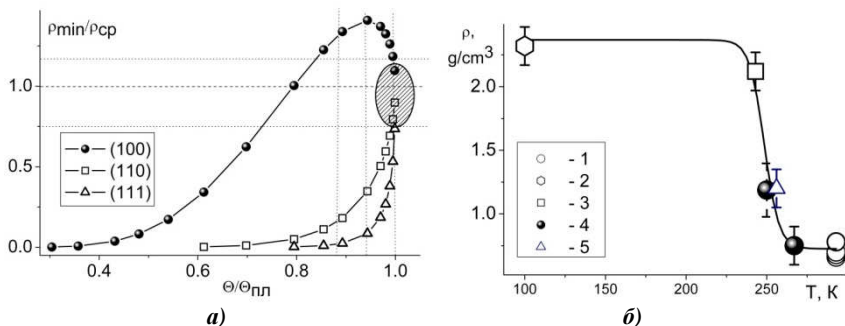


Рис. 4. Корреляция величин плотности для КЖС, полученных по методике МС, с теоретическими подходами и экспериментальными методами исследования:

а – анизотропия распределения плотности в зависимости от кристаллографических направлений и температуры (теоретический подход Власова [26]). В кружке область значений плотности из настоящей работы; *б* – данные из различных экспериментальных методов (точки 1, 2, 3 и 5 – пояснения в тексте). Точка 4 – область значений плотности из настоящей работы

Эта фаза, впоследствии названная «поливодой», или «вода II», наиболее подробно была исследована группой Б. В. Дерягина (серия лабораторных экспериментов с капиллярами [28]) и нашла свое спектроскопическое подтверждение в работе [29]. Несколько позже Б. В. Дерягин и Н.И. Чураев опубликовали опровержение своих прежних результатов [30], где показали возникновение необычных свойств воды за счёт примесей силикатов. Величину плотности для точки 3 вряд ли можно аргументировать присутствием в системе какой-либо примеси в форме силикатов, поскольку она характеризует жидкую дисперсную фазу в земных облаках с отрицательными температурами, или холодных облаках (ХО) [31, 32]. Эта вода представляет собой, по мнению А.Н. Невзорова, самостоятельную полиморфную модификацию воды – «А-фазу», или «Аморфную воду». Физическим аргументом возможности существования такого состояния является наличие КЖС на ледяной поверхности в льдосодержащих облаках (границе лед-воздух).

Для наших целей из цитируемых работ важен вывод о том, что плотность воды в некристаллической форме находится в обратной зависимости от удельной концентрации водородных в её структуре. В идеальном случае максимальной плотностью должна обладать структура, полностью

лишенная водородных связей. По-видимому, такая ситуация частично как раз и реализуется в нашей системе (точка 4), где для сравнения (точка 5) приведены данные из работы [33]. Поэтому удовлетворительное совпадение величин плотностей для КЖС на разных подложках говорит в пользу следующего механизма. Поскольку характеристики подложек (плотность материала, удельная поверхность, диаметр пор) принципиально не отличаются между собой, то их присутствие сводится к экранированию водородных связей, что наглядно проявляется в увеличенном значении плотности КЖС ($\rho \sim 1,19 \text{ г/см}^3$) по сравнению с объемной водой. Однако в нашем случае процесс экранировки носит более глубокое физическое содержание, которое кратко сводится к следующему. Экспериментально установленное повышенное значение плотности КЖС есть «продукт деятельности» в системе сегнетоэлектрического фазового перехода (СФП) второго рода (возможности и реализация которого будут представлены в п. 3.5.3). Аномально заниженная величина плотности КЖС (точка 1) свидетельствует не о пониженной «плотности» молекулярного слоя воды, а о его дискретности. Это свойство тесно связано с геометрической неоднородностью глинистой подложки. Количественно учесть нарушение непрерывности алюмосиликатной поверхности нашим методом не представляется возможным. Поэтому в отличие от процесса экранирования поверхностью, который, по сути дела, фиксировался величиной изменения энергии водородных связей между молекулами внутри самой системы, контроль неоднородности выполнялся на основе оценки изменения энергии водородных связей всего «обменного комплекса» с активными центрами кристаллической решетки минерала. Отметим, что полученное методом МС значение плотности КЖС удовлетворительно согласуется с литературными данными [20], выполненные традиционными для минералогии методами и подходами (см. рис.4, б).

3.3. Вязкость КЖС.

Основополагающей идеей в определении величины вязкости КЖС является факт, что динамическое поведение мессбауэровских зондов железа в рамках модели ограниченного диффузионного движения (МОДД) [34, 35] обусловлено не раскачкой колебаний атомов, а изменением свойств окружающей среды (водных пленок). Для нас важно то, что свойства среды можно выразить через микровязкость η , значение которой в свою очередь позволит сопоставить с результатами для плотности КЖС (п. 3.1).

Механизм смещения мессбауэровских зондов подобен молекулярным движениям, обеспечивающим текучесть жидкости. Поэтому совместное использование из гидродинамики формулы Стокса ($\gamma = 6\pi r \eta$) и известного соотношения Эйнштейна ($D = kT/\gamma$) позволяют вычислить эффективную микровязкость КЖС воды. Типичными признаками применения МОДД могут служить температурное поведение вероятности эффекта

Мёссбауэра ($f' \approx S(T)$) для зондов Fe^{3+} (см. рис. 1, а), а также постоянство полуширины экспериментальной линии во всём температурном интервале (поведение др. параметров спектра см., например, в [7]). Применяя описанную выше процедуру, было установлено в зависимости от P/P_0 значение эффективной микровязкости КЖС воды ($\eta = 4,02 \dots 6,65$ Па·с). С одной стороны, выполненная методом МС оценка величины η удовлетворительно согласуется с результатами работы [37], где с помощью методики молекулярной динамики показана смена колебательного режима движения осциллятора на режим ограниченной диффузии, а с другой – величина вязкости среды позволяет сказать, что КЖС подобен аморфному льду высокой плотности (HDA) (см., также п. 3.1). Действительно, полученное значение η указывает на то, что свойства ближайшего окружения мессбауэровской метки очень сильно отличаются от свойств «свободной» воды, поскольку значение η в среднем в пять раз больше, чем у глицерина ($\eta = 1,480$ Па·с).

3.4. Структурный состав замороженных пленок воды и КЖС

Структурный анализ КЖС выполнялся в рамках фрактального формализма. В качестве оценочного параметра использовали фрактальную размерность (d_f), тесно связанную не только с геометрической топологией объектов, но и с процессами эволюции динамических систем (в нашем случае – топологический фазовый переход (ТФП)). Для удобства представления экспериментальных данных способы определения фрактальной размерности разобьем на два подхода – отдельно для кристаллического льда и КЖС.

3.4.1. Структура КЖС. Идея первого подхода обусловлена связью параметра d_f с критическими индексами (β , ν), которые характеризуют наличие термofлуктуационных процессов в системе. В рамках фрактальной концепции объект КЖС будем считать перколяционным кластером. В пользу такого предположения говорит аргумент, что такие структуры ведут себя как фрактальные на малых и как однородные на больших масштабах. Тогда согласно [37] имеем соотношение между фрактальной размерностью и критическими индексами:

$$d_f = d - \frac{\beta}{\nu} . \quad (4)$$

Для нахождения индексов воспользуемся тем фактом, что поведение температурной зависимости вероятности эффекта Мёссбауэра ($f' \approx S(T)$) вблизи критических точек носит сингулярный характер (см. рис. 2, а). Математическую процедуру обработки экспериментальных данных проводили методом критических показателей ($f' \propto (1 - T/T_m)^\beta$), традиционно применяемым при анализе критических явлений в жидкостях (см., например, [27]). Результат обработки (для наглядности иллюстрация представ-

лена в логарифмическом масштабе (см. рис. 2 б) и дополнительном использовании универсальных соотношений между показателями [27] позволили с помощью (4) выполнить оценку величины фрактальной размерности ($\langle d_f \rangle = 2,70$).

Таким образом, полученное среднее значение d_f для КЖС удовлетворительно согласуется с теоретическим значением фрактальной размерности, характерной для «губки» Менгера, что совпадает с кристаллической формой льда (см. ниже),

3.4.2. Структура кристаллического льда. Идея первого подхода обусловлена связи параметра d_f с упругими свойствами межслоевого пространства. Согласно [38] модули Юнга E и сдвига G связаны между собой как

$$G = \frac{E}{d_f}, \quad (5)$$

где d_f – фрактальная размерность структуры, определяемая уравнением [39]:

$$d_f = (d - 1)(1 + \mu). \quad (6)$$

Здесь d – размерность евклидова пространства, в котором рассматривается фрактал (в нашем случае $d = 3$); μ – коэффициент Пуассона, оцениваемый традиционно по результатам механических испытаний (для льда, см., например, [40]).

Для согласования с мессбауэровскими данными нами была разработана следующая методика. С одной стороны, следуя Френкелю [41] есть связь между модулем сдвига и коэффициентом вязкости объекта, а с другой – вязкость можно выразить через коэффициент диффузии (см. п. 3.3). Тогда, дополняя наш подход уравнениями (5) и (6), оценка величины параметра d_f для кристаллического льда, находящегося в межслоевом пространстве минерала, удовлетворительно согласуется с теоретическим значением фрактальной размерности, характерной для «губки» Менгера ($d_f = \log 20 / \log 3 = 2,728$) [42].

3.4.3. Структура квазиаморфного льда¹. Представленная выше методика только на первый взгляд кажется безупречной, поскольку ее применение для квазиаморфного льда дало неудовлетворительный результат. Действительно, экспериментально установленное изменение модуля сдвига даже на 30% по сравнению с кристаллическим льдом приводит к нефизическому значению коэффициента Пуассона для аморфного льда ($\mu = 1,00$). Тогда как из теории упругости изотропных тел [43] следует, что коэффициент Пуассона обязан находиться в пределах $-1 \leq \mu \leq 0,5$.

¹Название для фазы обусловлено тем, что характер температурного поведения мессбауэровских параметров отличается от аналогичных для «чисто» кристаллической фазы и типичен для начала процесса аморфизации льда.

Для получения физически корректных значений μ был специально разработан косвенный подход, основанный на установлении наряду со старыми ($\mu = E/G - 1$) новых характеристик вещества, отражающих особенности деформации материала. Из широкого набора подобных характеристик твердого тела наиболее подходящим для решения задачи может быть параметр Грюнайзена, который, подобно μ , применяется для описания свойств кристалла, зависящих от его объема:

$$\gamma = - \frac{d \ln \omega}{d \ln V}, \quad (7)$$

где ω – частота обрезания Дебая.

В работе [44] (см., также [45]) на основании уравнения состояния Ми-Грюнайзена для твердого тела в рамках модели Дебая были получены соотношения, позволяющие определить γ при известном μ , и наоборот. Для проверки однозначности связи и одновременно корректности применения в дальнейшем уравнения $\mu(\gamma)$ была предварительно проведена оценка параметра Грюнайзена для кристаллического льда. Полученное таким образом значение ($\gamma = 3/2 \cdot (1 + \mu)/(2 - 3\mu) \approx 2,13$) находится в удовлетворительном согласии с результатами расчетов для многих металлов, ионных и молекулярных кристаллов, а также стекол [46].

Оценку параметра Грюнайзена для квазиаморфного льда проведем методом МС, который потенциально позволяет это получить из зависимости температуры Дебая от давления (или объема). Следуя подходу [47] при сжатии на величину $\Delta V = V_1 - V_2$ изменение дебаевской температуры от начального значения θ_0 к конечному θ определяется соотношением, которое следует из (7) (математические детали см., в [48]):

$$g = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{-\gamma} g_0 \approx \left(1 + \gamma \frac{\Delta V}{V_1} \right) g_0. \quad (8)$$

Во-первых, для расчета параметра Грюнайзена при использовании (8) необходимо дополнительно провести температурные измерения для зонда Fe^{2+} . Далее из температурных зависимостей площади мессбауэровского спектра $S(T)$ и температурного сдвига линии $\delta(T)$ определялись оптимальные значения температуры Дебая в рамках МНК с помощью модифицированного метода линеаризации (пакет MStools [9]). Во-вторых, величину сжатия ΔV возможно осуществить благодаря тому, что вода заполняет межслоевое пространство монтмориллонита послойно, и при этом ее толщину можно строго фиксировать. С методической точки зрения процесс фиксации достигался с помощью выдерживания образца в широком диапазоне равновесных относительных давлений паров воды ($P/P_0 = 0,0 \div 1,0$).

Применение формулы (8) привело к результату параметра Грюнайзена ($\gamma = 0.11(4)$), значение которого аномально мало в сравнении, как с

кристаллическим льдом в наших измерениях (см. выше), так и с другими материалами.

По аналогии, как мы поступали с кристаллическим льдом, применим тот же подход к квазиаморфному льду. Однако оценка коэффициента Пуассона ($\mu = (4/3\gamma - 1)/(2\gamma + 1) = -0,699$) дала необычный результат, поскольку для подавляющего числа веществ $\mu > 0$. Необычность заключается в том, что при одноосном растяжении стержня из такого материала происходит его поперечное расширение, а не сжатие, как традиционно принято считать. Но с физической точки зрения такое поведение вещества принципиально не запрещено ($-1 \leq \mu \leq 0,5$), и для подобных систем (см., например, обзор [49]) в настоящее время принят термин ауксетичные (от греческого «auxetos» - «разбухающий»). На основании полученных результатов можно заключить, что квазиаморфный лед, адсорбированный на алюмосиликатной поверхности, ведет себя как ауксетик. Можно дополнительно предположить, что с прикладной и академической точек зрения такое поведение пленок воды в какой-то мере поможет объяснить механизм возникновения природных нанотрубок. Однако это, по-видимому, отдельная задача и здесь не рассматривается.

Для оценки фрактальной размерности квазиаморфного льда обладающего ауксетичными свойствами воспользуемся результатами теоретической работы [50], где на основе фрактальной модели неоднородной среды с хаотической структурой определены ее макроскопические упругие свойства. Отличительной особенностью полученной в [50] зависимости коэффициента Пуассона от фрактальной размерности является то, что в выражении по сравнению с (6) дополнительно присутствует параметр, ответственный за структуру материала. Тогда, подбирая структуру неоднородной среды (варьируя координационное число Z перколяционной решетки), потенциально возможно получить материал с наперед заданными свойствами или в нашем случае – ауксетик вдали от порога протекания. Задача по автоматически появившейся необходимости предварительного определения числа Z решалась с помощью метода МС (из анализа температурной зависимости квадрупольного расщепления $\Delta(T)$ для мессбауэровского зонда Fe^{2+}). Полученная таким образом оценка величины фрактальной размерности для квазиаморфного льда ($d_f = 0,616$), находящегося в межслоевом пространстве минерала, удовлетворительно согласуется с теоретическим значением, характерной для «пыли» Кантора ($d_f = \log 2 / \log 3 = 0,6309$) [42].

Таким образом, изложенные выше результаты показывают, что перестройка структуры льда на топологическом языке представляет собой трансформацию одного монофрактала ($d_f = 2,70$) в другой ($d_f = 0,616$), отличный от первого величиной d_f (рис. 5).

В конце настоящего пункта рассмотрим еще одну характерную особенность поведения параметра Грюнайзена, которая тесно связана с присутствием в системе фазовых переходов. Как правило (см. [51] и ссылки в ней), аномально малые (в том числе и отрицательные) значения эффективных коэффициентов Грюнайзена (и/или теплового расширения) являются следствием «размытых» структурных превращений с изменением структуры ближнего порядка в твердом или жидком состоянии.

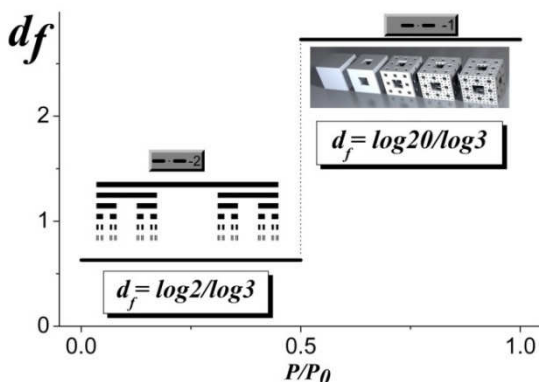


Рис. 5. Структурная перестройка поверхностного льда в зависимости от толщины адсорбированного слоя воды на минерале (в рамках фрактального подхода):

1 – «губка» Менгера; 2 – «пыль» Кантора

Необходимость определения типа ФП (хотя бы на качественном уровне) обусловлена тем, что структурные превращения в неупорядоченных системах в отличие от таковых в кристаллах не являются фазовыми переходами в строгом смысле этого слова.

При этом сразу можно сказать, что аномальное значение параметра Грюнайзена ($\gamma < 0$) в первом приближении может быть признаком наличия в системе ФП.

Таким образом, установленное выше аномально низкое значение параметра Грюнайзена для квазиаморфного льда косвенно говорит о потенциальной возможности присутствия в системе ФП. Подозрения в пользу наличия перехода усиливаются обнаруженным ранее экспериментальным фактом [52], основанным на температурном поведении такого мессбауэровского параметра, как квадрупольное расщепление ($\Delta = 2\varepsilon$) для зонда Fe^{2+} , которое носило типичный для ФП характер.

3.5. Фазовые переходы в замороженных пленках воды и КЖС

Мотивацией для изучения ФП может служить то положение, что лед является примером особого типа вещества, в котором наблюдаются

фазовые превращения в кристаллическом и/или аморфном состоянии (см., например, [40]). Особо отметим, что изменение геометрии пространства (3D → 2D) еще больше усиливает актуальность темы, поскольку «замаскированные» в объеме эффекты начинают наиболее ярко проявляться в приповерхностных слоях вещества. В качестве иллюстрации можно привести серию исследований (см. [40] и ссылки там), где приповерхностная вода испытывает сегнетоэлектрический фазовый переход второго рода в отличие от объемной воды, находящейся в том же температурном интервале в параэлектрическом состоянии. Поэтому привлечение стандартных (теоретических и экспериментальных) подходов для анализа таких своеобразных фазовых переходов оказывается не совсем эффективным.

Ниже будет показано, что применение метода МС открывает возможность изучения наряду с классическими особый тип ФП, который известен под названием топологический фазовый переход (ТФП) и широко реализуем в двумерных системах.

Природа двумерного плавления является одной из наиболее известных и одновременно нерешенных проблем физики твердого тела. Несмотря на то, что данной тематике посвящено гигантское число публикаций (см., например, свежий обзор [53]), противоречия, связанные с микроскопическим описанием физики плавления в двух измерениях, сохраняются и даже увеличиваются. Так в отличие от плавления в трехмерном случае, где процесс всегда происходит и описывается в рамках стандартного перехода первого рода, двумерное плавление может идти различными сценариями. Выяснению конкретного сценария, базирующегося на методике МС, и посвящен настоящий раздел.

3.5.1. Процессы поверхностного плавления

Классический подход. С физической точки зрения отправным пунктом может быть положение, по которому основной причиной наличия КЖС на льду являются всякого рода структурные перестройки, локализованные на поверхности. Наглядным ориентиром сближения по использованию методики МС к поверхностным ФП говорит факт обнаружения нами недавно [54] необратимого фазового перехода типа «порядок-порядок», приводящий к перестройке сверхрешеток ($I_c \xrightarrow{188\text{ K}} I_h$). Однако в нашем случае реализуется ФП другого типа – «порядок-беспорядок», т.е. плавление, которое начинается с поверхности кристалла и фронт расплава движется внутрь объекта. В пользу такого механизма процесса говорят два экспериментальных факта, полученные и базирующиеся на методе МС. Действительно, для грубой оценки начала подвижности структурных элементов решетки можно использовать температуру Таммана ($T_m \sim 0,5...0,8T_m$, где T_m – температура плавления). Однако, сравнение величины T_m , сделанное с помощью приведенного выше соотношения, со значением T_s , полученное из мессбауэровского эксперимента (см. рис. 1, а), говорит не в пользу при-

менения для наших систем только одного критерия Таммана. Несовершенство такой ситуации связано с традиционной односторонностью подхода к анализу процесса плавления, что неоднократно отмечалось и критиковалось в литературе (см., например, [55]). Поэтому необходимо одновременно рассматривать динамические параметры обеих фаз – «твердое тело-расплав». Наибольшее влияние поверхности проявляется, если для анализа экспериментальных данных воспользоваться критерием Линдемана в дебаевском приближении [57]. Независимо от толщины КЖС (методика оценки величины которой будет показано ниже) с помощью МС установлено, что температура Дебая поверхностной фазы (\mathcal{G}_D^S) вдвое меньше объемной (\mathcal{G}_D^V), поэтому и $T_m^S \langle T_m^V$, поскольку $T_m \propto \mathcal{G}_D$. Таким образом, метод МС наряду с качественной фиксацией появления подвижной фазы в случае поверхностного плавления льда (см. рис. 1, а)) позволяет заключить, что замерзшая вода, адсорбированная на алюмосиликатной поверхности, плавится при температурах ниже температуры для объемного льда.

Однако не все так безоблачно в классическом подходе и имеется следующий отрицательный момент при его использовании. Установленный факт невыполнения критерия Линдемана [56] в дебаевском и/или эйнштейновском приближениях ($\gamma_L = \sqrt{\langle(\Delta R)^2\rangle}/R \ll (0,15)$) говорит о специфике подвижности мессбауэровской метки.

Таким образом, получается, что в двумерном случае в игру вступают какие-то другие возбуждения, которых не существует в трехмерном варианте.

Квантовый подход. Приведенные выше отрицательные результаты по использованию чисто классических критериев плавления (Таммана и/или Линдемана) мотивирует применение других, в частности квантовых подходов для двумерных систем. В пользу такого выбора говорят приведенные ниже экспериментальные факты, базирующиеся в основном на методике применения МС в исследуемых системах.

1. В отличие от трех измерений, где процесс плавления традиционно происходит посредством перехода первого рода, для которого температурное поведение мессбауэровского параметра f' носит обычно характер резкого разрыва в точке перехода T_m , в нашем случае имеем квазидвумерную систему. Действительно, наблюдается аномально большой сдвиг критической точки в низкотемпературную область (даже с учетом наличия глинистой подложки) и, что более существенно, довольно сильную «затянутость» переходной области по температуре ($\Delta T \sim 50$ К) (см. рис. 1, а). Дополнительно в пользу двумерной геометрии изучаемой системы говорят наши ранние исследования по поведению других мессбауэровских параметров (изомерный сдвиг, квадрупольное расщепление и параметр асимметрии) (см., например, [7]). При этом не следует исключать из внимания

настоящие данные по плотности (п. 3.2), поскольку заниженное значение величины ρ для связанной воды по сравнению с объемной водой можно также объяснить двумерной геометрией пространства.

2. В двумерном случае между кристаллической и жидкой фазами, как было показано в [58], существует особая прослойка, называемая (по аналогии с физикой жидких кристаллов) гексатической фазой (ГФ, или hexatic phase). Система в такой фазе, с одной стороны, лишена кристаллической жесткости и в ней решетка весьма подвижна. Это позволило по ранее разработанной методике (см., например, [12, 56]) получить соотношение между коэффициентами диффузии ($D_{cr} \leq D_{hp} \leq D_l$). Полученный промежуточный результат значений коэффициентов диффузии между кристаллом и жидкостью удовлетворительно согласуется с компьютерным моделированием [59], что дополнительно позволило сделать оценку модуля сдвига, которая оказалась характерной для «жидкости» с элементами упорядочения. С другой стороны, локально решетка ГФ представляет собой кристалл с дефектами, что аргументируется совпадением фрактальной размерности d_f для гексатической с гексагональным кристаллическим льдом (см. п. 3.4.2). При этом рассматриваемая фаза должна удерживать общую ориентированность решетки, т.е. два разнесенных в пространстве друг от друга участка решетки ориентированы в одну сторону. Таким образом, о ГФ можно говорить как о фазе с квазидальним ориентационным порядком. В пользу последнего утверждения можно привести наши ранние данные по исследованию искусственно текстурированных образцов с помощью МС, носящие в основном косвенный характер [7].

3. В двумерных системах реализуется топологический фазовый переход, отличающий от стандартных первого и второго рода тем, что в объектах фиксируется набор так называемых топологических дефектов: вихрей в пленке сверхтекучего гелия, дислокаций в двумерном кристалле, вихревых конфигураций в двумерном магнетике (X-Y-модель) и т.д. [53]. С качественной стороны механизм фазового перехода обязан процессам рождения и исчезновения пары «вихрь – антивихрь» в двумерной системе, которые формально можно отнести и к квантовым возмущениям. При этом если в объекте присутствуют два различных набора топологических возмущений, то результат конкуренции последних может привести к новым макроскопическим свойствам материалов. Таким образом, при смене доминирующего типа возмущения может изменяться и свойства вещества, т.е. происходит своеобразный квантовый переход. Иллюстрацией может служить описанный выше (см. п. 3.4.3) частично- или квазиаморфный лед с необычными макроскопическими свойствами материалов, характерных для ауксетиков.

Для объяснения указанного факта и экспериментальных данных, которые будут представлены ниже, необходимо создать квантовую модель. В

основу модели могут быть положены квантовые отличия орто (есть магнитный момент) от пара (нет магнитного момента) спин-изомеров воды, что проявляется в разной вероятности присутствия последних в составе той или иной кластерной группы. Для пара-молекулы, находящейся в основном состоянии, ее вращательное квантовое число $J = 0$, что благоприятствует образованию из таких молекул фазы с тетраэдрической координацией или кластеров с замкнутыми Н-связями. Орто-молекулы с нечетными значениями квантового числа J доминируют в более плотных местах с нарушенными водородными связями.

По аналогии с парой «вихрь – антивихрь», традиционно применяемых в двумерных системах, представленные выше два конкурирующих набора спин-изомеров воды мы и будем рассматривать как топологические возмущения на квантовом уровне.

В [52] нами ранее была показана возможность регистрации методом МС с последующим определением орто-пара отношения ($R = N_o/N_p$) в замороженных пленках воды, адсорбированных на поверхности монтмориллонита. Приведенная на рис. 6 зависимость обязывает с физической точки зрения аргументировать переходы «пара- $H_2O \leftrightarrow$ орто- H_2O », поскольку имеется квантово-механический запрет на спонтанную конверсию спин-изомеров воды.

Рассмотрим возможные механизмы с углом зрения на применяемый в статье метод МС, которые кратко сводятся к следующему. Первым из возможных динамических механизмов перехода «пара- $H_2O \leftrightarrow$ орто- H_2O » является спиновая конверсия при столкновении с парамагнитными частицами. В нашем случае анализ экспериментальных данных наводит на мысль о существенной роли в этом процессе глинистой поверхности. Задача была решена в [7], где нами было показано, что значение энергии «связи» димеров $[Fe^{3+}(OH)_2]^{4+}$ с алюмосиликатной поверхностью оказалось соизмеримой с энергией активации при диффузионном движении ($U \approx 3,4 \cdot 10^{-2}$ эВ). Приведенная энергетическая величина косвенно подтверждает отсутствие препятствия выполнению условий для снятия квантово-механического запрета в неоднородном (градиентном) магнитном поле, созданном алюмосиликатной поверхностью. Вторым фактором может быть результат сверхтонкого взаимодействия ядерных спинов, приводящий к внутримолекулярному квантовому смешиванию состояний спиновых изомеров H_2O . Для такого процесса необходимо, чтобы энергии вращательных уровней орто- и пара-состояний были близки, т.е. должны реализовываться так называемые дублеты этих состояний [60]. Обработка мессбауэровских данных в рамках модели критических показателей (см. рис. 1, б) позволила нам определить две особых точки воды (льда) ($T_{m1} = 250$ К, $T_{m2} = 267$ К), причем как для орто-, так и для пара-изомеров H_2O имеет место смешанное состояние с близкими по энергии значениями.

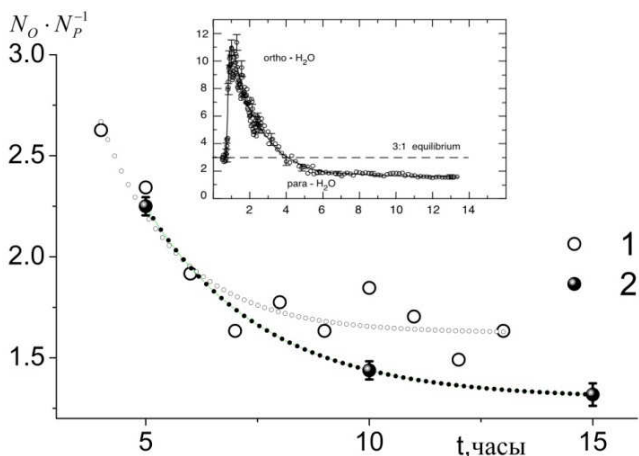


Рис. 6. Результаты сравнительного анализа временного орто/пара отношения концентраций изомеров H_2O из экспериментальных данных, полученных методом МС для «замороженной» воды на алюмосиликатной поверхности (2) и с помощью терагерцевой спектроскопии для паров воды на угольном фильтре (1). На вставке – временная эволюция орто/пара отношения в водяном паре, прошедшем через слой угольного адсорбента [61]. Пунктирная линия показывает равновесное орто/пара отношение (3:1) в водяном паре

На основе полученных нами новых экспериментальных результатов с помощью метода МС и литературных данных (см., например, [60]) можно обосновано сказать, что величины особых точек на шкале температур имеют квантовую природу. При этом, следуя [60], значения температур особых точек (T_m) льда детерминированы резонансным совпадением величины энергии вращательных квантов дублетов орто-пара переходов ($h\Omega_{kl}$) с тепловой (трансляционной) энергией (kT_m), т.е. имеем $h\Omega_{kl} \approx kT_m$. Таким образом, в 2D-слоях жидкости или 2D-кристаллах малые и большие масштабы взаимосвязаны. При этом с энергетической точки зрения понятно, что наряду с классическим диполь-дипольным взаимодействием нельзя полностью игнорировать роль водородных связей, которые имеют квантово-механическую природу. В основном этому аспекту и было уделено наше внимание.

Если в трёхмерном случае плавление всегда происходит посредством перехода первого рода, то в двумерном – картина существенно усложняется. В обзоре [53] был представлен анализ различных сценариев плавления двумерных систем, а также современное состояние физических экспериментов и компьютерного моделирования в данной области. Для наших систем наиболее подходящими являются два типа сценария плавления. Согласно первому типу, как было показано в серии работ (см. ссылки

в [53]) (теория Березинского – Костерлица – Таулесса – Хальперина – Нельсона – Янга (БКТХНЯ)), система плавится посредством двух непрерывных переходов Березинского – Костерлица – Таулеса (БКТ), при этом в ней возникает промежуточная гексатическая фаза, характеризующаяся квазидальним ориентационным порядком. Согласно второму типу сценария плавления [53], отличающему от такового в рамках теории БКТХНЯ, процесс происходит посредством двух переходов: непрерывного перехода (БКТ) «твёрдое тело – гексатическая фаза» и последующего перехода первого рода «гексатическая фаза – изотропная жидкость». В [53] представлены критерии зависимости сценария плавления от вида потенциала взаимодействия: 1) В случае дальнедействующих взаимодействий (кулоновское, диполь-дипольное) система плавится в соответствии со сценарием БКТХНЯ посредством двух непрерывных переходов с промежуточной гексатической фазой; 2) В случае короткодействующих потенциалов возможен вариант двухстадийного плавления с непрерывным переходом между кристаллической и гексатической фазой и переходом первого рода между гексатической фазой и изотропной жидкостью. Анализ наших данных, базирующий в основном на методике МС, позволяет заключить, что в системе наиболее вероятно реализуется сценарий первого типа (рис. 7).

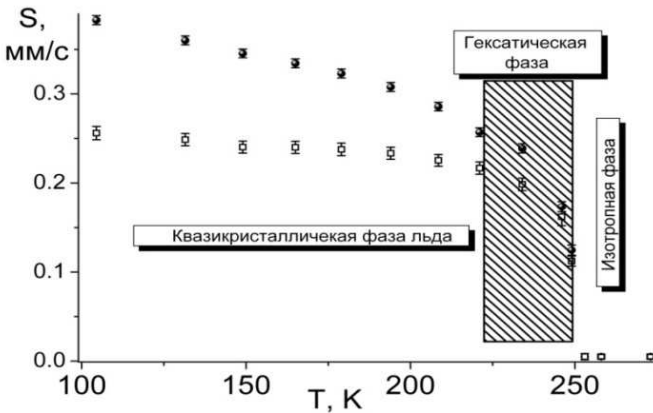


Рис. 7. Сценарий плавления для двумерного поверхностного льда, реализуемый в рамках теории БКТХНЯ и базирующийся на температурной зависимости поведения вероятности эффекта Мёссбауэра ($f' \propto S$)

Казалось бы, в системе должен как раз реализовываться второй тип сценария плавления, поскольку по данным МС фиксировался случай короткодействующих потенциалов (см. п. 3.2). Однако глинистая поверхность снимает экранировку водородных связей, и дальнедействующие взаимодействия выступают на передний план.

С другой стороны, гипотеза второй критической точки (фазовый переход первого рода – переход «жидкость-жидкость») также не подтвердилась (см. п. 3.5.2), что лишний раз говорит не в пользу второго типа сценария плавления. При этом особо отметим, что первый непрерывный переход, как будет показано ниже (см. п. 3.5.3), обусловлен сегнетоэлектрическим фазовым переходом (СФП), а причина второго перехода пока не определена и потребует, по-видимому, дополнительных исследований. «Структура» промежуточной гексатической фазы однородна и по нашим данным не зависит от толщины образца (в рамках фрактального подхода).

3.5.2. Вторая критическая точка

Одна из амбициозных целей многих исследователей физики воды заключается в поиске второй критической точки «жидкость-жидкость», где исчезает грань между двумя типами воды [64].

В нашем случае воспользуемся гипотезой [64] о существовании в воде второй критической точки (T_{C2}) при отрицательных температурах, что означало бы существование в метастабильной области ФП по аналогии с ФП «газ-жидкость» в стабильной области существования воды ($T_{C1} = 647$ К, $\rho_{C1} = 0,328$ г/см³, $P_{C1} = 22$ МПа). Координаты второй гипотетической точки ($T_{C2} = 220$ К, $\rho_{C2} = 1$ г/см³, $P_{C2} = 100$ МПа) определяются в основном по результатам молекулярно-динамических экспериментов или различных теоретических моделей (см., например, [62]), поскольку использование «обычных» физических опытов затруднено по причине близости значения T_{C2} к температуре спонтанной гомогенной кристаллизации (или зародышеобразования, $T_H \sim 231$ К).

Как было впервые показано в [63], задача определения второй критической точки сводится к поиску фазового перехода «жидкость-жидкость» между метастабильной водой низкой плотности (low density liquid, LDL) и метастабильной водой высокой плотности (high density liquid, HDL). С другой стороны, дополнительно в нашем случае появляется возможность «торможения» процесса нуклеации в системе. Это можно добиться применением в эксперименте алюмосиликатной подложки, что позволяет сосуществовать одновременно на ней «незамерзающих» пленок воды и адсорбированных кристаллов льда в нужном температурном регионе.

Сделаем попытку согласовать наши результаты, полученные на базе методики МС, с потенциальной возможностью анализа существования критической точки разделения жидкость-жидкость (liquid-liquid critical point, LLCP) или «полиморфизма жидкой воды». Основная трудность обнаружения LLCP заключается в следующей причине. Объемная вода при атмосферном давлении может быть переохлажденной ниже температуры плавления до температуры гомогенной нуклеации, но ниже которой она обычно кристаллизуется. Поскольку гомогенная нуклеация льда полностью

подавляет жидкую воду, то область на фазовой диаграмме (150–235 К) часто рассматривается как термодинамически стабильный регион, но по причине отсутствия в нем жидкой воды он носит специфический термин «ничейная земля» [64]. Однако с методической точки зрения использование МС не вызывают никаких принципиальных ограничений в «ничейной земле».

Кратко рассмотрим две принципиальные трудности, обусловленные «чистотой» самого объекта и побочного влияния на него подложки, а также возможные пути их решения. С физической точки зрения интерпретация экспериментальных данных не совсем будет корректной, поскольку в качестве объекта исследования нужно использовать «чистую» воду. В нашем случае по причине необходимости применения зондовой методики мы имели дело хоть и с «сильно» разбавленными, но растворами. Поэтому в первом приближении для корректного анализа наших данных можно воспользоваться подходом, сформулированным в [65] и теоретически иллюстрированным на примере бинарных жидкофазных смесей. Суть подхода состоит в следующем. При предположении наличия у воды критической точки «жидкость-жидкость» добавление растворенного вещества приводит к образованию критических линий, выходящих из критической точки «чистой» воды. Следовательно, имеется потенциальная возможность экспериментального доступа для обнаружения гипотетической второй точки в воде при помощи изучения разбавленных водных растворов. Но, к сожалению, этот подход детально (теоретически) до конца не разработан, и на настоящий момент нами реализован только методический аспект использования зондовой МС без каких-либо количественных результатов. Поэтому определить значение величины гипотетической второй точки в воде при помощи методики МС пока не представляется возможным.

Рассмотрим вторую трудность, т.е. возможное влияние глинистой подложки на полученные нами результаты. Так установленные выше две температуры поверхностного плавления ($T_{m1} = 250$ К и $T_{m2} = 267$ К) ни напрямую ($T_{C2} = 220$ К), ни косвенно ($\rho_{C2} = 1$ г/см³) не подтверждают гипотезу «полиморфизма жидкой воды». Действительно величина плотности для КЖС, с одной стороны (см. точку 4 рис. 4, б), слабо согласуется с результатами работы [66] (см. дополнительно ссылки в [67]), и такое аномально высокое поведение системы будет аргументировано ниже другой причиной (см. п. 3.5.3). С другой стороны, аномально низкое значение плотности КЖС также не согласуется с литературными данными (см, например, [68]) и обусловлено согласно нашим результатам «паразитным» влиянием глинистой поверхности.

Несмотря на то что наши результаты не дали четкого доказательства наличия LLCP в исследуемых системах, тем не менее, остается не аргументированным факт «расслаивания» воды на две фазы разной плотности, что автоматически побуждает физически обосновать такое поведение. Сравнительно недавно в [69] была предложена теоретическая модель, ко-

торая описывает КЖС в форме двух слоев. При этом внешняя часть переходного слоя фактически является «жидкой водой», что согласуется с теорией Томпсона. Внутренняя часть переходного слоя является фазой, отличной как ото льда, так и от воды, что согласуется с гипотезой Фарадея. Особо отметим, что такой теоретический подход в форме двухкомпонентной структуры КЖС устраняет практически полутора вековой срок противоречия между гипотезами Фарадея и Томпсона. Именно наши экспериментальные результаты (см. рис. 4), полученные и базирующиеся на методике МС, удовлетворительно описываются в рамках такого подхода.

3.5.3. Сегнетоэлектрический фазовый переход

Факт, что молекула H_2O обладает значительным дипольным моментом [40, 70], является необходимым, но недостаточным условием, чтобы жидкая вода проявляла признаки сегнетоэлектричества. Физической причиной такого поведения воды в «обычных» условиях может быть то, что диполь-дипольное взаимодействие молекул подавляется короткодействующими водородными связями. Однако в специальных условиях локализации воды, например, в наноразмерных полостях и/или каналах, либо при формировании тонких поверхностных слоёв, она может приобретать качественно новые свойства, не исключая и сегнетоэлектрическое упорядочение молекулярных диполей. Действительно, например, сегнетоэлектрические свойства кубического льда экспериментально были продемонстрированы на однослойных тонких пленках [71], а сегнетоэлектрические слои гексагонального льда (толщиной в 30 монослоев) были выращены на платиновой поверхности (111) [72]. Особого внимания заслуживает работа [73], где экспериментально наблюдалось сегнетоэлектричество в воде молекулярной подсистемы (в структурных каналах монокристалла берилла). Авторам цитированной работы удалось на примере ансамбля одиночных молекул воды, локализованных в порах кристаллической решётки берилла, локализовать их так, что они находились достаточно далеко, чтобы предотвратить водородных связей, но достаточно близко, чтобы сохранить диполь – дипольные взаимодействия.

При этом не следует упускать из вида потенциальную возможность исследования сегнетоэлектрического фазового перехода (СФП) в переохлажденной воде, поскольку одним из предсказаний теории [74] переход наблюдается в температурном интервале $T_c = 226 \div 236$ К, что удивительно близко к значению для второй критической точки. Более того, согласно теоретической оценке [74] свойства воды, находящейся в нанопорах определенной величины, близки к свойствам объемной воды при их переохлаждении. Это дает хороший шанс на перспективу, поскольку в определенной степени можно моделировать свойства объемной переохлажденной воды на основании полученной информации по свойствам «поровой» воды в наноразмерных порах.

В нашем случае мы предполагаем, что за температурный ход вероятности эффекта Мёссбауэра ($f' \approx S(T)$) для зондов Fe^{3+} (см. рис. 1, а) ответственен СФП. В пользу такого предположения говорят следующие факты. Во-первых, оценка величины плотности для КЖС (см. п. 3.2) можно рассматривать как продукт «деятельности» СФП. Во-вторых, геометрия локализации зондов Fe^{3+} в порах глиняной подложки подобна тому, что было установлено в структурных каналах монокристалла берилла [73] для ансамбля одиночных молекул воды. Дополнительно при этом нельзя не учитывать установленный нами ранее экспериментальный факт [52], где поведение такого мессбауэровского параметра как квадрупольное расщепление ($\Delta = 2\epsilon$) для зонда Fe^{2+} носило характер, свойственный для ФП и при той же температуре ($T_m = 250$ К). С другой стороны, не совпадение с результатами теории [74] в нашем случае, потребует дополнительных исследований в этом направлении и выходит за формат настоящей статьи.

Закключение. Об актуальности представленных и решенных выше задач позволяют судить публикации по физике льда [40] и/или науках о Земле. В прикладном аспекте значимость рассматриваемой в работе темы повышается необходимостью более детального уточнения роли воды в наших ранних исследованиях методом МС почв Земли и грунтов Марса [75, 76]. Следует отметить, что поиск жидкой воды, которая является неотъемлемым компонентом для существования жизни, складывается не совсем успешно. Однако, как было показано в настоящей работе, проблема может быть частично снята, поскольку диагностика с помощью метода МС наличия КЖС на поверхности льда является характерным признаком присутствия «свободной» воды на Марсе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rosenberg R.* Why Is Ice Slippery? // *Physics Today*. 2005. December. P. 50–55.
2. *Dash J.G.* The physics of premelted ice and its geophysical consequences / J. G. Dash, A.W. Rempel, J.S. Wettlaufer // *Reviews of modern physics*. 2006. Vol.78, July–september. P. 695-741.
3. *Wei X.* Surface Vibrational Spectroscopic Study of Surface Melting of Ice / X. Wei, P.B. Miranda, Y.R. Shen // *Volume 86, Number, Physical Review Letters*. 2001. P. 1554-1557.
4. Experimental and theoretical evidence for bilayer-bybilayer surface melting of crystalline ice / *Sánchez M. A.* [et al.] // *PNAS*. 2017. Vol. 114, no. 2. P. 227–23.
5. *Burger K.* Capillary Mössbauer spectroscopy for solution chemistry / K. Burger, A. Vértes // *Nature*. 1983. Vol. 306, no. 5941. P. 353-354.
6. *Захаров С.Д.* Кластерная структура воды (обзор) / С.Д. Захаров, И.В. Мосягина. ФИАН. 2011. Препринт № 11.
7. *Залуцкий А.А.* Физические методы исследования твердофазных реагентов и катализаторов / А.А. Залуцкий, Е.Г. Степанов. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 312 с.
8. Рентгенография основных типов породообразующих минералов (слоистые и каркасные силикаты) / под ред. В.А. Франк-каменецкого. Л.: Недра, 1983. 359 с.

9. *Русаков В.С.* Мессбауэровская спектроскопия локально неоднородных систем. Алматы: Изд-во ОПНИ ИЯФ НЯЦ РК, 2000. 431 с.
10. *Залуцкий А.А.* Определение коэффициентов диффузии мессбауэровских атомов железа в плёнках воды, адсорбированных на поверхности наноглин // Изв. вузов. Сер. Химия и хим. технология. 2014. Т. 57, вып.12. С. 41-47.
11. *Fletcher N. H.* Surface structure of water and ice // *Philosophical Magazine*. 1962. Vol.7:74. P. 255-269.
12. *Залуцкий А.А.* Особенности механизмов диффузии и динамических свойств мессбауэровских атомов железа на поверхности наноглин // Физикохимия поверхности и защита материалов. 2016. Т. 52, № 1. С. 30-40.
13. *Рыжкин И.А.* Протонная структура льда вблизи границы лед-металл / И.А. Рыжкин, В.Ф. Петренко // ЖЭТФ. 2005. Т. 128, вып. 2(8). С. 354-369.
14. *Ананян А.А.* Оценка средней толщины пленок воды в талых и мерзлых тонкодисперсных горных породах // Связанная вода в дисперсных системах. Вып. 2. Изд-во МГУ, 1972. С. 106-113.
15. *Kvividze V.I.* The Mobile Water Phase on Ice surfaces / V.I. Kvividze, V.F. Kiselev, A.V. Kurzaev and L.A. Ushakova // *Surface Science*. 1974. Vol. 44. P. 60-68.
16. *Копосов Г.Д.* Калориметрические исследования квазижидкого слоя на поверхности гранул льда / Г.Д. Копосов, А.В. Тягунин // Письма в ЖЭТФ. 2011. Т. 94, вып. 5. С.406-409.
17. *Dash J.G.* Thermomolecular Pressure in Surface Melting: Motivation for Frost Heave // *Science*. 1989. Vol. 246. P. 1591-1593.
18. *Израелашвили Д.* Межмолекулярные и поверхностные силы / пер. с англ. И.М. Охапкин, К.Б. Зельдович; науч. ред. И.В. Яминский. М.: Научный мир, 2011. 456 с. (Фундаментальные основы нанотехнологий: лучшие зарубежные учебники).
19. *Waterstructureandscience* [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www1.lsbu.ac.uk/water/martin_chaplin.html.
20. *Гончарова Л.В.* Диэлектрические свойства дисперсных грунтов и минералов и фазовые переходы связанной воды: монография / Л.В. Гончарова, Т.Г. Макеева, Ю.М. Егоров. М.: Университетская книга, 2012. 422 с.
21. *Fletcher N.H.* Structural aspects of the ice-water system // *Rep. Prog. Phys*. 1971. Vol. 34. P. 913-994.
22. *Власов А.А.* К обобщенной теории плазмы и теории твердого тела // Вестник Московского ун-та. 1946. № 3-4. С. 63-96.
23. *Борн М.* Динамическая теория кристаллических решеток / М. Борн, Х. Кунь. М.: ИЛ, 1958.
24. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. М.: ЛЕНАНД, 2014. 360 с.
25. *Власов А.А.* Теория многих частиц. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016. 352 с.
26. *Власов А.А.* Нелокальная статистическая механика. М.: Наука, 1978. 254 с.
27. *Паташинский А.З.* Флуктуационная теория фазовых переходов / А.З. Паташинский, В.Л. Покровский. М.: Наука, 1975. 256 с.
28. *Дерягин Б.В.* Новые свойства жидкостей / Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев. М.: Наука, 1971. 176 с.
29. *Lippincott E.R.* Polywater Vibrational spectra indicate unique stable polymeric structure / E.R. Lippincott, R.R. Stromberg, W.H. Grant and G.L. Cessac // *Science*. 1969. Vol. 164. P. 1482-1497.

30. *Derjaguin B.V.* Nature of «Anomalous Water» / B.V. Derjaguin, N.V. Churaev // Nature. 1973. Aug. 17, vol. 244. P. 430-431.
31. *Невзоров А.Н.* Исследования по физике жидкой фазы в льдосодержащих облаках // Метеорология и гидрология. 1993. № 1. С. 55–68.
32. *Невзоров А.Н.* Биморфизм и свойства жидкокапельной воды в холодных облаках // Вопросы физики облаков. М.: Метеорология и гидрология, 2008. С. 268–298.
33. Interfacial Melting of Ice in Contact with SiO₂ / S. Engemann, H. Reichert, H. Dosch, J. Bilgram, V. Honkimaki, A. Snigirev // Physical Review Letters. Vol. 92, N 20. P. 205701-1 – 205701-4.
34. *Шайтан К.В.* Конформационная подвижность и теория эффекта мессбауэра в белках (модель броуновского осциллятора с сильным затуханием для конформационных мод) / К.В. Шайтан, А.Б. Рубин // Мол. Биол. 1980. Т. 14. С. 1323 - 1335.
35. *Шайтан К.В.* Эффект мессбауэра для броуновского осциллятора с сильным затуханием и внутренняя динамика макромолекул // Вестник Моск. ун-та. 1982. Сер. 3. Физика. Астрономия. Т. 23. С. 15- 21.
36. *Шайтан К.В.* О влиянии амплитуды флуктуаций на коэффициент трения броуновского осциллятора в водной среде / К.В. Шайтан, С.С. Сарайкин // Биофизика. 2000. Т. 45, вып. 3. С. 407-413.
37. *Соколов И.М.* Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // Успехи физ. наук. 1986. Т. 150, вып. 2. С. 221-255.
38. *Козлов Г.В.* Структура и свойства дисперсно-наполненных полимерных нанокомпозигов // Успехи физ. наук. 2015. Т. 185, № 1. С. 35-64.
39. *Новиков В.У.* Структура и свойства полимеров в рамках фрактального подходов / В.У. Новиков, Г.В. Козлов // Успехи химии. 2000. Т. 69, № 6. С. 572-599.
40. *Petrenko V.F.* Physics of ice / V.F. Petrenko, R.W. Whitworth. Oxford University-Press. 2002. 347 p.
41. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
42. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
43. *Ландау Л.Д.* Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1965. 204 с.
44. *Беломестных В.Н.* Взаимосвязь ангармонизма и поперечной деформации квазиизотропных поликристаллических тел / В.Н. Беломестных, Е.П. Теслева. // ЖТФ. 2004. Т. 74, вып. 8. С.140-142.
45. *Беломестных В.Н.* Акустический параметр Грюнайзена твердых тел // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30, вып. 3. С. 14-19.
46. *Беломестных В.Н.* Коэффициент Пуассона и параметр Грюнайзена твердых тел / В.Н. Беломестных, Е.П. Теслева // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2003. Т. 306, № 5. С. 8-12.
47. *Шпиль В.С.* Резонанс гамма-лучей в кристаллах. М.: Наука, 1969. 407 с.
48. *Paskin A.A* Reformulation of the Temperature Dependence of the Debye Characteristic Temperature and its Effect on Debye-Waller Theory // ActaCryst. 1957. Vol. 10. P. 667- 669.
49. *Конек Д.А.* Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (Обзор) / Д.А. Конек, К.В. Войцеховски, Ю.М. Плескачевский, С.В. Шилько // Механика композитных материалов и конструкций. 2004. Т. 10, № 1. С. 35-69.

50. Новиков В.В., Wojciechowski K.W. Отрицательный коэффициент Пуассона фрактальных структур / В.В. Новиков, К.В. Wojciechowski // ФТТ. 1999. Т. 41, вып. 12. С. 2147-2153.
51. Бражкин В.В. «Трудности перевода»: что означают отрицательные эффективные коэффициенты Грюнайзена в ударно-волновых экспериментах? (Развернутый комментарий к статье А.Б. Медведева и Р.Ф. Трунина «Ударное сжатие пористых металлов и силикатов» [УФН **182** 829 (2012)]) // Успехи физ. наук. 2012. Т.182, № 8. С. 847-853.
52. Zalutskii A.A. Mössbauer Study of Dynamic and Phase Transitions in an Aqueous Film– Nanoclay Surface System / A.A. Zalutskii, N.A. Sed'mov, E.N. Shkol'nikov, V.V. Morozov // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. 2017. Vol. 81, No. 7. P. 812–816. Original Russian Text A.A. Zalutskii, N.A. Sed'mov, E.N. Shkol'nikov, V.V. Morozov, 2017, published in Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk, Seriya Fizicheskaya. 2017. Vol. 81, No. 7. P. 898–903.
53. Рыжов В.Н. Переход Березинского – Костерлица – Таулеса и двумерное плавление / В.Н. Рыжов, Е.Е. Тареева, Ю.Д. Фомин, Е.Н. Циок // Успехи физ. наук. 2017. Т. 187, № 9. С. 921-951.
54. Залуцкий А.А. Изучение особенностей фазовых переходов в системе «железо-поверхность наноглин» с помощью мёссбауэровской спектроскопии // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40, вып. 20. С. 54-61.
55. Петров Ю.И. Кластеры и малые частицы. М.: Наука, 1986, 368 с.
56. Залуцкий А.А. Исследование механизмов диффузии мёссбауэровских атомов в системе «Замороженные водные растворы хлоридов железа – алюмосиликатная поверхность» // Вест. Таджик. нац. ун-та. Сер. естественных наук. 2014. Т. ¼ (153). С. 103-117.
57. Киселев В.Ф. Основы физики поверхности твердого тела / В.Ф. Киселев, С.Н. Козлов, А.В. Зотеев. М.: Изд-во Моск. ун-та, Физ. факультет МГУ, 1999. 284 с.
58. Halperin B.I. Theory of Two-Dimensional Melting / B.I. Halperin, D.R. Nelson // Physical Review Letters. 1978. Vol. 41, Issue 2, July 10. P.121-124
59. Los J.H. Melting temperature of graphene / J.H. Los, K.V. Zakharchenko, M.I. Katsnelson, A. Fasolino // Physical Review. 2015. Vol. B 91. P.045415-1 – 045415-6.
60. Першин С.М. Квантовые отличия орто и пара спиновых изомеров H₂O как физическая основа аномальных свойств воды // Наноструктуры. Мат. физика и моделирование. 2012. Т. 7, № 2. С. 103-120.
61. Tikhonov V.I. Separation of Water into Its Ortho and Para Isomers / V.I. Tikhonov, A.A. Volkov // Science. 2002. V. 296, 28 June. P. 2363.
62. Понятовский Е.Г. Вторая критическая точка и низкотемпературные аномалии физических свойств воды / Е.Г. Понятовский, В.В. Синицын, Т.А. Позднякова. // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 60, вып. 5. С. 352-356.
63. Poole P.H. Phase behaviour of metastable water / P.H. Poole, F. Sciortino, U. Essmann, H.E. Stanley // Nature. 1992. Vol. 360. P. 324-328.
64. Mishima O. The relation between liquid, supercooled and glassy water / O. Mishima, H.E. Stanley // Nature. 1998. Vol. 396. P.329–335.
65. Анисимов М.А. Холодная и переохлажденная вода как необычный сверхкритический флюид // Сверхкритические Флюиды. Теория и Практика. 2012. Т. 7, № 2. С. 19-37.

66. The anomalous behavior of the density of water in the range $30\text{ K} < T < 373\text{ K}$ / F. Mallamace, C. Branca, M. Broccio, C. Corsaro, C-Y Mou, S-H. Chen // PNAS. 2007. November 20, vol. 104, no. 47. P.18387–18391.
67. *Mallamace F.* The liquid water polymorphism // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 2009. Sep 8; vol. 106(36). P. 15097–15098.
68. Observation of the density minimum in deeply supercooled confined water / D. Liu, Y Zhang, C.C. Chen, C-Y Mou, P.H Poole, S.H. Chen // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2007. Vol. 104. P. 9570–9574.
69. *Рыжкин И.А.* Модель квазижидкого поверхностного слоя льда / И.А. Рыжкин, М.И. Рыжкин, В.В. Сеницын, А.В. Клюев // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т.106, № 11. С. 724-728.
70. *Зацепина Г.Н.* Физические свойства и структура воды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 184 с.
71. Ferroelectricity in Water Ice / M.J. Iedema [et al.] // The Journal of Physical Chemistry. 1998. Vol. B. 102 (46). P. 9203–9214.
72. *Su X.* Surface-Induced Ferroelectric Ice on Pt(111) / X. Su, L. Lianos, Y. Shen, G.A. Somorjai // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80 (7). P. 1533–1536.
73. Incipient ferroelectricity of water molecules confined to nano-channels of beryl / *B.P. Gorshunov* [et al.] // Nature Communications. 2016. Vol. 7:12842. P.1-10.
74. *Fedichev P.O.* Application of the two-liquid model for the interpretation of the observed electrophysical properties of supercooled water in nonopores / P.O. Fedichev, L.I. Men'shikov // Письма в ЖЭТФ. 2013. Т.97:4. С. 241–247.
75. *Залуцкий А.А.* Мессбауэровский анализ оксигидроксидов железа в почвах Земли и грунтах Марса / А.А. Залуцкий, А.А. Залуцкая, Н.А. Седьмов, Р.Н. Кузьмин // Литология и полезные ископаемые. 2015. № 4. С. 305-336.
76. Мёссбауэровский анализ соединений железа в почвах Земли и некоторых грунтах Марса / А.А. Залуцкий, А.В. Иванов, В.В. Морозов, Н.А. Седьмов, С.А. Шоба // ДАН. 2011. Т. 441, №1. С. 95-97.

Содержание

МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА

1. **Абрамов В.В.** Признаки устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром..... 3
2. **Бородин А.В.** Бариянализ и n -мерные конформные отображения. 1. 9
3. **Букушева А.В.** Геометрические структуры на кораспределениях субримановых многообразий..... 26
4. **Галаев С.В.** О геометрии распределений субримановых многообразий с ненулевым тензором Вагнера-Схоутена..... 31
5. **Коромыслов В.А., Ширяев А.А.** О неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, реализующейся в различных геометриях..... 36
6. **Медведева Л.Б., Сидорова Л.А.** Многообразие бисекант нормального многообразия размерности p и порядка $n-p+1$ 45
7. **Ройтенберг В.Ш.** О бифуркациях линейных дифференциальных уравнениях второго порядка с периодическими коэффициентами на компактификации Пуанкаре фазового пространства..... 53
8. **Ройтенберг В.Ш.** О дифференциальных уравнениях второго порядка на окружности, близких к интегрируемым..... 61

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

9. **Балунов А.И.** Энтропия и информация в химико-технологическом образовании..... 71
10. **Гулевич Н.М., Кузнецов В.О.** О выпуклых функциях и неравенствах..... 84
11. **Жаров А.Н., Митюшов Д.Г., Жарова И.Г.** О преподавании темы: синтез кодеров циклических кодов..... 92
12. **Ивакина М.Г., Бельман С.А.** Построение математической модели оптимального режима деятельности коллектива..... 96
13. **Иванова Н.И., Куликова М.В.** О вычислении пределов числовых последовательностей..... 100
14. **Ройтенберг В.Ш.** Несколько замечаний о преподавании дифференциальных уравнений студентам технических вузов..... 105

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

15. **Ананьина А.С., Абрамов В.В.** Условия разрешимости антагонистической игры на единичном квадрате..... 110
16. **Балушкин А.Л.** Особенности применения бимоментной теории для расчета армированных стержней..... 116
17. **Бытнев Д.О., Королев Л.В.** Дробно-дифференциальное уравнение Фоккера-Планка в теории надежности..... 122
18. **Гагарин А.Ю., Дудин В.М.** Энергоэффективная технология изготовления асфальтобетонной смеси..... 126
19. **Гладышева М.Н., Дудин В.М.** Борьба со снежным накатом на автомобильных дорогах..... 132

20.	Демчук В.А., Доброхотов В.Б., Тумаков С.А. Анализ напряженно-деформированного состояния фибробетонных кровельных изделий, содержащих полипропиленовую фибру.....	134
21.	Елисеев М.Г., Лискина Е.Ю. Построение моделей бинарного выбора для оценки вероятности выигрышей в торгах на примере товаров медицинского назначения.....	138
22.	Зудин В.Л. Особенности статических характеристик дроссельного пневмопреобразователя.....	144
23.	Зудин В.Л. Графоаналитический расчет дроссельного пневмопреобразователя.....	153
24.	Иванов П.А. Корреляционные фильтры Калмана в задачах различения геометрически искаженных изображений.....	160
25.	Казаров Е.Г., Рудаков А.М. Выбор предпочтительного варианта автоматизированной системы управления с применением теории многокритериальной функции полезности.....	166
26.	Капранова А.Б. О применении формализма Орнштейна-Уленбека к описанию начальной стадии гидродинамической кавитации.....	172
27.	Комиссарова Ю.А., Дудин В.М. Влияние применения твердых химических противогололедных материалов на безопасность автомобильных дорог... ..	177
28.	Куделин Д.В., Несиоловская Т.Н. Анализ НДС плоской резиновой мембраны в сложнапряженном состоянии.....	183
29.	Курныгина А.А., Дудин В.М. Влияние применения фрикционных противогололедных материалов на безопасность автомобильных дорог... ..	191
30.	Наумов В.А. Уравнение регрессии максимальных годовых уровней и расходов рек.....	195
31.	Трофимец Е.Н. Разработка модели прогнозирования слоя дождевого паводка на территории Ленинградской области.....	201
32.	Шишкина Н.А. Расчет маржинальной доходности образовательных программ.....	205
33.	Язев В.А. Моделирование процесса смешения крошкообразного каучука с наполнителем.....	209

КОМПЬЮТЕРНЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ НАУКИ

34.	Ангелов А.С., Ермишин А.С. Совершенствование управления взаимодействия с внешними поставщиками организации оптово-розничной торговли на основе SRM-систем.....	214
35.	Гапоник К.А., Ермишин А.С. Применение информационных технологий для совершенствования бизнес-процессов аутсорсинговой компании.....	221
36.	Раухваргер А.Б., Дудин Д.А. О регулировании контраста черно-белого изображения с использованием нормального закона распределения.....	230
37.	Жарехина В.Ю., Харитонов А.П. Проектирование клиентского программного обеспечения автоматизированной информационной системы контроля и учета продукции в процессе производства лака.....	236
38.	Кравченко С.А., Харитонов А.П. Концептуальная модель информационной системы распределения и учета учебной нагрузки кафедры вуза... ..	242
39.	Марьясин О.Ю., Колодкина А.С., Огарков А.А. Практическая реализация методов прогнозирующего управления.....	247

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

40. **Макаров В.М., Калаева С.З., Маркелова Н.Л.** Механо-химически модифицированные гальваношамы в асфальтобетоне..... 257
41. **Сорокина М.С., Соловьев М.Е.** Квантово-химическое исследование комплексообразования гидропероксильного и гидроксильного радикалов с гидроксид-ионом и ионом гидроксония..... 264

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ И НАУКИ О ЗЕМЛЕ

42. **Ермишин А.С.** Адаптационные и продуктивные особенности импортного голштинского скота в условиях Верхнего Поволжья России..... 273
43. **Кудрявцева Н.А., Дудин В.М.** Влияние протогололедных реагентов на природную среду..... 278
44. **Никитина Е.Л., Курицына А.А.** Утилизация отработанных медьсодержащих растворов..... 282
45. **Седьмов Н.А., Залуцкий А.А., Школьников Е.Н.** Кинетика разрушения магнитных микрочастиц в верхних горизонтах почвы..... 287
46. **Залуцкий А.А., Седьмов Н.А., Соколов А.Ю., Школьников Е.Н.** Мессбауровские исследования квазижидкого слоя на алюмосиликатной поверхности природного происхождения..... 295

Научное издание

**МАТЕМАТИКА
И
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА

Выпуск 13

Ответственный редактор А.Н. Жаров

Редактор М.А. Канакотина

Подписано в печать 16.10.18. Формат 60x84 1/16. Бумага белая.
Гарнитура Таймс. Офсетная печать
Усл. печ. л. 19,99. Уч.-изд. л. 19,94. Тираж 25. Заказ

Ярославский государственный технический университет
152023, Ярославль, Московский пр., 88

Издательский дом ЯГТУ
150000, Ярославль, ул. Советская, 14а

Для заметок